МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

С. А. Теляковский

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

I семестр

Москва 2002 год

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет**

С. А. Теляковский

Курс лекций по математическому анализу. I семестр

Курс представляет собой несколько сокращенное (из-за ограничения объема) изложение лекций, читаемых автором на механико-математическом факультете МГУ.

Чтобы облегчить восприятие материала вчерашними школьниками, общность в изложении нарастает постепенно.

Предназначается для студентов, а также преподавателей математических специальностей классических университетов и вузов с повышенным курсом математики.

Рецензент — профессор А. М. Седлецкий

Введение

Настоящий курс написан на основе лекций, читавшихся автором.

Более 15 лет автор читал лекции по математическому анализу в МФТИ. Тогда при разработке курса за основу был взят учебник С. М. Никольского "Курс математического анализа". Разумеется, использовались и другие источники. В первую очередь "Курс дифференциального и интегрального исчисления" Г. М. Фихтенгольца и "Курс математического анализа" Л. Д. Кудрявцева.

С 1996 года автор читает курс математического анализа на механико-математическом факультете МГУ. Значительное, почти на 30 процентов увеличение числа лекционных часов, изменение программы и ее акцентов привели к существенным изменениям содержания курса. При этой переработке большую помощь оказал Т. П. Лукашенко, который предоставил автору свои записи лекций. Это повлияло на выбор материала и подходы к его изложению.

Курс состоит из 4 выпусков, соответствующих I, II, III и IV семестрам.

Для сокращения записи используются следующие обозначения.

$\forall$ — "для каждого; для любого; для всех" (это перевернутая начальная буква английского *All*),

$\exists$ — "существует; найдется" (это перевернутая начальная буква английского *Exist*),

$:$ — "такой, что; такие, что",

$:=$ — "обозначим",

$\Rightarrow$ — "следует",

$\Leftrightarrow$ — "равносильно".

Поясним употребление символа $\Rightarrow$. Если A и B — некоторые утверждения, то запись $A \Rightarrow B$ означает "из A следует B".

В математике часто используются термины "достаточное условие", "необходимое условие". При этом слова достаточность и необходимость имеют такой же смысл, как в обыденной речи: если $A \Rightarrow B$, то условие A является достаточным, для того чтобы имело место B, а B необходимо для выполнения A.

Символ $A \Leftrightarrow B$ является объединением символов $\Rightarrow$ и $\Leftarrow$. Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что из A следует B, а из B следует A. Другими словами, условие A является необходимым и достаточным для выполнения B, а условие B необходимо и достаточно для выполнения A.

Март 2002 г. *С. А. Теляковский*

Глава 1
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1.1. Бесконечные десятичные дроби

Рациональные числа (в частности, целые числа) и их свойства считаются известными из школы. Рациональные числа можно сравнивать (т.е. для них введены понятия "больше" и "меньше"), над ними определены арифметические действия.

Но рациональных чисел недостаточно даже для нужд элементарной математики. Так, длина диагонали квадрата со стороной 1 равна $\sqrt{2}$, а это число иррациональное, т.е. не рациональное. Не является рациональным и число π, выражающее длину окружности диаметра 1.

Напомним определение числовой прямой. На прямой, которую считают расположенной горизонтально, выбирают начальную точку O и единицу длины — отрезок OE, отложенный вправо от точки O. Точке O ставится в соответствие число 0, точке E — число 1. Откладывая вправо от точки E шаг за шагом единичный отрезок, получим точки, соответствующие натуральным числам $2, 3, \ldots$, а откладывая единичный отрезок влево от точки O, — точки, соответствующие целым отрицательным числам.

Затем строятся точки, соответствующие рациональным числам. Чтобы получить точку, соответствующую положительному рациональному числу m/n, откладываем m раз вправо от точки O отрезок, длина которого равна $1/n$. Точно также для отрицательных рациональных чисел находим соответствующие им точки слева от точки O.

Таким образом, каждому рациональному числу поставлена в соответствие точка на числовой прямой. Но при этом не всем точкам числовой прямой соответствуют рациональные числа. Например, так будет для точки, лежащей справа от O на расстоянии $\sqrt{2}$.

В этой главе будет показано, как можно пополнить рациональные числа, чтобы каждой точке числовой прямой соответствовало число, а каждому числу — точка на прямой.

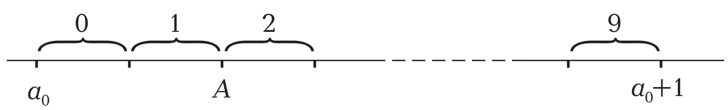
Такое пополнение можно осуществить разными способами. Мы сделаем это на базе бесконечных десятичных дробей. Этот путь был очень осторожно намечен в школе.

Начнем с построения бесконечной десятичной дроби, соответствующей заданной точке A на числовой прямой.

Пусть точка A расположена справа от точки O и не отвечает натуральному числу. Найдем целые числа a_0 и $a_0 + 1$ такие, что точка A лежит между ними. В качестве целой части бесконечной десятичной дроби, соответствующей точке A, берем a_0.

После этого промежуток между точками a_0 и $a_0 + 1$ делим на 10 равных частей и приписываем этим частям слева направо цифры от 0 до 9. Среди этих промежутков длины $1/10$ находим тот, внутри которого находится точка A (случай, когда A оказывается одной из точек деления, обсудим позднее) и в качестве первого десятичного знака искомой дроби берем цифру, приписанную этому промежутку. Продолжая этот процесс (в предположении, что A не является точкой деления), получим бесконечную десятичную дробь, соответствующую точке A.

Рассмотрим теперь случай, когда на точку A попала одна из точек деления. Пусть, например, будет ситуация как на рисунке:



Точкам, лежащим вблизи точки A справа, мы в качестве первого десятичного знака приписали цифру 2, а лежащим слева — цифру 1. По поводу самих точек деления нужно договориться, к какому промежутку мы их относим: лежащему справа или лежащему слева. Если точки деления относить к правым промежуткам, то для точки A на рисунке получим $a_0{,}2$, а все остальные десятичные знаки — ноли, т.е. получим $a_0{,}2000\ldots$. Если точки деления относить к левым промежуткам, то для точки A получим $a_0{,}1$, а все остальные десятичные знаки — девятки, т.е. получим $a_0{,}1999\cdots = a_0{,}1(9)$.

В зависимости от договоренности, относить точки деления к правым или к левым промежуткам, для точек числовой прямой, соответствующих натуральным числам, также получим две бесконечные десятичные дроби. У одной из них все десятичные знаки ноли, а у другой целая часть на единицу меньше, а все десятичные знаки — девятки.

Для точек, лежащих на числовой прямой слева от точки O, пишем перед дробью знак минус, а затем аналогичным образом находим числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$, определяющие соответствующую бесконечную десятичную дробь $-a_0{,}a_1a_2\ldots$.

Эти рассуждения показывают, что для всех точек числовой прямой (кроме начальной точки O), которые при указанном построении попадают на точки деления, возможны две записи — с нолем в периоде, т.е. в виде целого числа или конечной десятичной дроби, или с девяткой в периоде. Для остальных точек бесконечная десятичная дробь определяется однозначно.

Чтобы каждой точке числвой прямой соответствовала единственная бесконечная десятичная дробь, уславливаются не различать получающиеся при нашем построении дроби с 0 и с 9 в периоде. Обычно в каждом рассуждении используют дроби только с нолем или только с девяткой в периоде.

Поставим обратную задачу — для заданной бесконечной десятичной дроби $\pm a_0{,}a_1a_2\ldots$ найти соответствующую ей точку на числовой прямой.

По знаку дроби и числу a_0 находим два идущих подряд целых числа, между которыми должна располагаться искомая точка. Затем, разбив промежуток между этими точками на 10 равных частей, по значению a_1 можно указать тот из получившихся промежутков длины $1/10$, которому должна принадлежать наша точка.

Продолжая это построение шаг за шагом, получим последовательность промежутков, каждый из которых содержится в предыдущем, а длина его в 10 раз меньше. Искомая точка должна принадлежать всем этим промежуткам.

Но обязательно ли существует такая точка, мы сейчас не знаем. В дальнейшем будет установлен положительный ответ на этот вопрос.

Все сказанное о бесконечных десятичных дробях следует рассматривать как наводящие соображения к тому, чтобы назвать числами бесконечные десятичные дроби.

Определение. *Действительными* (*вещественными*) числами называются бесконечные десятичные дроби $\pm a_0{,}a_1a_2\ldots$, где выбран определенный знак: "+" или "−", a_0 — натуральное число или ноль, а все десятичные знаки $a_1, a_2, \ldots$ — цифры от 0 до 9. При этом дробь $\pm a_0{,}a_1\ldots a_m(9)$ считается равной дроби $\pm a_0{,}a_1\ldots a_{m-1}d00\ldots$, у которой m-ый десятичный знак d равен $a_m + 1$.

Действительные числа будем обозначать буквами и писать $a = \pm a_0{,}a_1a_2\ldots$, опуская обычно при этом знак $+$. Число 0 записывают как десятичную дробь $0{,}00\ldots$, которую можно снабдить и знаком $+$ и знаком $-$, но обычно этой дроби знак не приписывают.

При записи чисел $a, b, c, \ldots$ в виде бесконечных десятичных дробей для обозначения десятичных знаков будем использовать эти же буквы с индексами. Таким образом,

$$a = \pm a_0{,}a_1a_2\ldots; \quad b = \pm b_0{,}b_1b_2\ldots; \quad c = \pm c_0{,}c_1c_2\ldots.$$

Для каждого числа $a = \pm a_0{,}a_1a_2\ldots$ определяется число $-a$, которое отличается от a только знаком, т.е. $-a := \mp a_0{,}a_1a_2\ldots$. На числовой прямой точки, соответствуюшие числам a и $-a$, располагаются симметрично друг другу относительно начальной точки O.

Выясним, как соотносятся рациональные и действительные числа.

Рациональные числа представимы в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.

Будем для определенности считать, что $m > 0$. Если разделить m на n "уголком", то получим либо конечную десятичную дробь, которую можно записать в виде бесконечной дроби с 0 в периоде, либо бесконечную десятичную дробь, которая обязательно будет периодической.

В самом деле, в этом случае остатками при делении на n могут быть только числа $1, 2, \ldots, n-1$. Рассмотрим остатки, которые получаются при делении m на n после того, как все значащие цифры числа m уже снесены. Эти остатки рано или поздно начнут повторяться, значит, будут повторяться и десятичные знаки.

Таким образом, каждое рациональное число может быть представлено бесконечной десятичной периодической дробью.

Верно и обратное утверждение: каждая бесконечная десятичная периодическая дробь равна отношению $\frac{m}{n}$ целого числа m к натуральному числу n. В этом можно убедиться, например, с помощью формулы суммы членов бесконечной геометрической прогрессии. Впрочем, эту формулу нельзя признать аккуратно доказанной в школьных учебниках, так как ее вывод основывался на наивно-интуитивных представлениях о пределах. Во второй главе будет дано полное доказательство указанной формулы.

Итак, рациональные числа и только они представимы бесконечными десятичными периодическими дробями. Иррациональные числа записываются бесконечными десятичными непериодическими дробями. Примерами таких дробей может служить дробь $0{,}1010010001\ldots$ (количество нолей между цифрами 1 каждый раз увеличивается на один) или дробь, выражающая $\sqrt{2}$.

Теперь необходимо определить сравнение действительных чисел и арифметические действия над ними. При этом будем опириаться на свойства сравнения рациональных чисел и арифметических действий над ними.

В дальнейшем там, где это не может вызвать недоразумений, действительные числа будем называть просто числами.

§ 1.2. Сравнение чисел

Рассмотрим число $a = \pm a_0{,}a_1a_2\ldots$. Если все числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$ равны нулю, то не имеет значения, какой знак стоит перед дробью, число a называют нулем и пишут $a = 0$.

Пусть теперь среди чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ есть хотя бы одно, отличное от нуля. Тогда если перед дробью стоит знак $+$, число a называют положительным и пишут $a > 0$. А если перед дробью стоит знак $-$, число a называют отрицательным и пишут $a < 0$.

Определение. *Модулем* (или *абсолютной величиной*) числа

$$a = \pm a_0{,}a_1 a_2 \ldots$$

называется число

$$|a| := a_0{,}a_1 a_2 \ldots .$$

Таким образом, модуль числа либо положителен, либо равен нулю и, если $a > 0$, то $|a| = a$, а если $a < 0$, то $|a| = -a$.

Для рациональных чисел определение модуля известно из школы.

Определим сравнение чисел. Будем считать, что при записи бесконечных десятичных дробей мы пользуемся какой-либо одной формой записи — или с 0, или с 9 в периоде.

Определение. Отличные от нуля числа $a = \pm a_0{,}a_1 a_2 \ldots$ и $b = \pm b_0{,}b_1 b_2 \ldots$ называют *равными*, если они имеют одинаковые знаки и для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполняются равенства $a_k = b_k$.

В этом случае пишут $a = b$, а в противном случае пишут $a \neq b$.

Определим для чисел неравенства. Напомним, что для случая, когда одно из чисел равно нулю, неравенства были введены выше.

Определение. Пусть числа a и b не равны между собой. Тогда

1°. если числа a и b положительны, то говорят, что a *меньше* b и пишут $a < b$, если $a_0 < b_0$, или если для некоторго $k = 0, 1, 2, \ldots$, имеем $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$ и $a_{k+1} < b_{k+1}$;

2°. если одно из чисел положительно, а второе отрицательно, то отрицательное число меньше положительного;

3°. если оба числа a и b отрицательны, то $a < b$, если $|b| < |a|$.

Если $a < b$, то говорят, что b *больше* a и пишут $b > a$.

Из этого определения следует, что если $a < b$, то $-a > -b$.

При сравнении рациональных чисел эти определения дают тот же результат, что и при прежнем определении, когда для положительных дробей m/n и p/q писали $m/n < p/q$, если $mq < np$. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого факта.

Наряду со строгими неравенствами $<$ и $>$ используются нестрогие неравенства $\leqslant$ и $\geqslant$. Запись $a \leqslant b$ означает, что или $a < b$ или

$a = b$. Пользуясь знаком нестрогого неравенства, легко строить отрицание для строгого неравенства. Так, отрицанием утверждения $a < b$ является $a \geqslant b$.

Сформулируем свойства чисел, связанные с неравенствами (первая группа свойств действительных чисел).

I.1. *Для любых двух чисел a и b имеет место и притом только одно из соотношений: $a < b$, $a = b$ или $a > b$.*

Другими словами: если числа различны, то одно из них меньше другого.

Свойство I.1 называют упорядоченностью действительных чисел.

Свойство упорядоченности вытекает сразу из определения сравнения чисел.

I.2. *Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.*

Эти свойства называются транзитивностью знаков $<$ и $=$.

Транзитивность знака $=$ следует сразу из определения равенства.

Докажем транзитивность знака $<$. Пусть сначала $a \geqslant 0$. Тогда числа b и c положительны.

Представим числа a, b, c бесконечными десятичными дробями

$$a = a_0, a_1 a_2 \ldots; \quad b = b_0, b_1 b_2 \ldots; \quad c = c_0, c_1 c_2 \ldots,$$

используя какую-либо одну форму записи: с 0 или с 9 в периоде.

Так как $a < b$, то существует индекс k такой, что $a_i = b_i$ для $i = 0, 1, \ldots, k-1$ и $a_k < b_k$. Точно также существует индекс l такой, что $b_j = c_j$ для $j = 0, 1, \ldots, l-1$ и $b_l < c_l$.

Пусть $m := \min(k, l)$, т.е. m – меньшее из чисел k и l. Тогда $a_i = b_i = c_i$ для $i = 0, 1, \ldots, m-1$ и выполняются неравенства $a_m \leqslant b_m$ и $b_m \leqslant c_m$, причем по крайней мере одно из этих неравенств является строгим. Так как числа a_m, b_m и c_m – целые, то пользуясь транзитивностью знака $<$ для целых чисел, видим, что $a_m < c_m$, т.е. $a < c$.

Пусть теперь $a < 0$. Если $c \leqslant 0$, то $b < 0$ и для модулей чисел a, b и c имеем $|a| > |b|$ и $|b| > |c|$. Значит, по уже доказанному $|a| > |c|$, откуда $a < c$.

Если же $a < 0$ и $c > 0$, то $a < c$ по определению. Этим заканчивается доказательство свойства I.2.

Знак $\leqslant$ также обладает свойством транзитивности: *если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$.* Это следует из транзитивности знака $<$.

I.3. *Для каждого числа a существует натуральное число n такое, что $n > a$.*

Это свойство называют архимедовым. При определении действительных чисел как бесконечных десятичных дробей свойство I.3 очевидно: если $a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots$, то в качестве n можно взять $a_0 + 2$. Вместе с тем, архимедово свойство существенно при аксиоматическом подходе к определению действительных чисел.

Докажем несколько простых утверждений, связанных со сравнением действительных чисел с конечными десятичными дробями.

Теорема 1.2.1. *Пусть a и b — произвольные числа и $a < b$. Тогда существует конечная десятичная дробь α такая, что $a < \alpha < b$.*

Доказательство. Сначала будем считать число a неотрицательным.

Пусть в представлениях $a = a_0{,}a_1a_2\ldots$, $b = b_0{,}b_1b_2\ldots$ не используется 9 в периоде. Найдем наименьший номер k такой, что $a_k < b_k$, и номер $m > k$ такой, что $a_m < 9$. Легко проверить, что в качестве α можно взять конечную десятичную дробь $a_0, a_1 \ldots a_{m-1}d$, у которой m-ый десятичный знак d равен $a_m + 1$.

Если a и b имеют разные знаки, то можно взять $\alpha = 0$. А если число b неположительно, то находим конечную десятичную дробь β такую, что $|b| < \beta < |a|$, и полагаем $\alpha := -\beta$.

Теорема доказана.

Теорема 1.2.2. *Для любого числа a при каждом натуральном n существует конечная десятичная дробь α_n с n знаками после запятой такая, что*

$$\alpha_n \leqslant a \leqslant \alpha_n + 10^{-n}. \tag{1.2.1}$$

Доказательство. Если число a неотрицательно, то для каждого n имеем

$$a_0{,}a_1\ldots a_n \leqslant a \leqslant a_0{,}a_1\ldots a_n + 10^{-n}$$

и можно взять $\alpha_n := a_0{,}a_1\ldots a_n$. Для отрицательного $a = -a_0{,}a_1a_2 \ldots$ имеем $-a_0{,}a_1\ldots a_n - 10^{-n} \leqslant a \leqslant -a_0, a_1 \ldots a_n$ и полагаем $\alpha_n := -a_0{,}a_1\ldots a_n - 10^{-n}$.

Дроби α_n и $\alpha_n + 10^{-n}$, удовлетворяющие неравенствам (1.2.1), называют n-ми десятичными приближениями числа a соответственно с недостатком и с избытком. Для краткости в дальнейшем дроби α_n, будем называть n-ми десятичными приближениями числа a (не отмечая, что это приближения с недостатком).

Лемма 1.2.3. *Пусть $a < b$ и α_n, β_n — n-ые десятичные приближения чисел a и b. Тогда существует такое натуральное число k, что для всех $n \geqslant k$ выполняется неравенство*

$$\beta_n - \alpha_n > 10^{-k}. \tag{1.2.2}$$

Доказательство. Будем считать, что в представлении чисел десятичными дробями не используется запись с 9 в периоде.

Пусть сначала $a \geqslant 0$ и m — такое число, что $a_i = b_i$ для $i = 0, 1, \ldots, m-1$ и $a_m < b_m$. Покажем, что в качестве k можно взять любое натуральное число, удовлетворяющее условиям: $k > m$ и $a_k < 9$.

В самом деле, возьмем число c, у которого $c_i = a_i$ для всех $i \neq k$ и $c_k = a_k + 10^{-k}$. Понятно, что $b > c$. Обозначим n-ые десятичные приближения числа c через γ_n. Тогда для $n \geqslant m$ имеем $\beta_n > \gamma_n$. Но если $n \geqslant k$, то $\gamma_n = \alpha_n + 10^{-k}$. Значит, для этих n имеем $\beta_n > \alpha_n + 10^{-k}$ и выполняется неравенство (1.2.2).

Если $a < 0$ и $b \geqslant 0$, то $\beta_n \geqslant 0$ и для любого k такого, что $-a > 10^{-k}$, при всех n имеем

$$\beta_n - \alpha_n \geqslant -\alpha_n \geqslant -a > 10^{-k}.$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда $a < 0$ и $b < 0$.

Так как $a < 0$, то $\alpha_n + 10^{-n} \leqslant 0$ и, значит, n-ым десятичным приближением числа $|a|$ является $|\alpha_n + 10^{-n}|$. Точно также n-ым десятичным приближением числа $|b|$ является $|\beta_n + 10^{-n}|$.

Из условия $a < b$ следует, что $|a| > |b| > 0$. Для положительных чисел лемма уже доказана и мы можем выбрать такое k, что $|\alpha_n + 10^{-n}| - |\beta_n + 10^{-n}| > 10^{-k}$ для всех $n \geqslant k$. Но $|\alpha_n + 10^{-n}| - |\beta_n + 10^{-n}| = -(\alpha_n + 10^{-n}) + (\beta_n + 10^{-n}) = \beta_n - \alpha_n$ и мы пришли к оценке (1.2.2).

Лемма доказана.

Лемма 1.2.4. *Если для числа p существует такое натуральное число q, что для всех натуральных n*

$$|p| \leqslant q \cdot 10^{-n},$$

то $p = 0$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть для некоторого k число p_k (из представления p в виде бесконечной десятичной дроби) отлично от нуля.

Найдем натуральное m, для которого

$$10^{-k} > q \cdot 10^{-m}.$$

Тогда

$$|p| \geqslant p_k \cdot 10^{-k} \geqslant 10^{-k} > q \cdot 10^{-m},$$

что противоречит условию.

Лемма доказана.

§ 1.3. Точная верхняя и точная нижняя грани числовых множеств

Сделаем несколько предварительных замечаний о множествах.

Множество является одним из исходных понятий в математике, оно не определяется. Можно вместо слова "множество" говорить о наборе, совокупности, собрании, коллекции. Но все эти слова не могут служить определением, они только поясняют понятие множества.

Множество может содержать или не содержать те или иные объекты, которые принято называть элементами. Если элемент x принадлежит множеству A, то пишут $x \in A$, а если x не принадлежит множеству A, то $x \notin A$. Множество определяется набором своих элементов.

Приняты следующие обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел,

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел,

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Наряду с множествами, содержащими некоторые элементы, рассматривают множество, не содержащее ни одного элемента. Такое множество называют пустым и обозначают $\varnothing$. Если множество содержит хотя бы один элемент, его называют непустым.

Определение. Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, то A называют *подмножеством* множества B и пишут $A \subset B$ или $B \supset A$.

Например, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Так как пустое множество $\varnothing$ не имеет элементов, то считают, что $\varnothing \subset A$ для любого множества A.

Определение. Если $A \subset B$ и $B \subset A$ (т.е. каждый элемент множества A принадлежит B и каждый элемент B принадлежит A), то множества A и B называют *равными* и пишут $A = B$. В противном случае пишут $A \neq B$.

Таким образом, запись $A \subset B$ не исключает того, что $A = B$.

Переходим к теме настоящего параграфа о верхних и нижних гранях числовых множеств. Так как сейчас мы будем рассматривать только числовые множества, то будем говорить просто о множествах, подразумевая, что это множества чисел.

Определение. Непустое множество A называется *ограниченным сверху*, если существует такое число K, что $x \leqslant K$ для всех $x \in A$.

Непустое множество A называется *ограниченным снизу*, если существует такое число k, что $x \geqslant k$ для всех $x \in A$.

Определение. Если множество ограничено и сверху и снизу, его называют *ограниченным.*

Иначе можно сказать так: непустое множество A называется ограниченным, если существует такое число K, что для всех $x \in A$ справедливо неравенство $|x| \leqslant K$. Это вытекает из того, что неравенство $|x| \leqslant K$ эквивалентно двойному неравенству $-K \leqslant x \leqslant K$.

Определение. Число M называется *точной верхней гранью* непустого множества A, если

1) для любого $x \in A$ выполняется неравенство $x \leqslant M$;

2) для каждого числа $M' < M$ существует число $x' \in A$ такое, что $M' < x'$.

Множество может иметь только одну точную верхнюю грань.

Действительно, предположим, что числа M и M^* различны и оба являются точными верхними гранями непустого множества A. Пусть для определенности $M^* < M$. Так как M — точная верхняя грань, то существует элемент $x^* \in A$ такой, что $M^* < x^*$. Значит, M^* не может быть точной верхней гранью множества A.

Определение. Число m называется *точной нижней гранью* непустого множества A, если

1) для любого $x \in A$ имеем $m \leqslant x$;

2) для каждого числа $m' > m$ существует число $x' \in A$ такое, что $x' < m'$.

Понятно, что и точная нижняя грань множества (если она существует) определяется единственным образом.

Обозначения для точной верхней грани

$$M = \sup A = \sup_{x \in A} x$$

(sup от латинского *supremum* — “высшее”) и для точной нижней грани

$$m = \inf A = \inf_{x \in A} x$$

(inf от латинского $infimum$ — “низшее”).

Ясно, что если множество состоит из конечного набора чисел, то его точная верхняя грань равна наибольшему, а точная нижняя грань — наименьшему из этих чисел.

Если множество имеет точную верхнюю грань, то оно ограничено сверху, а если имеет точную нижнюю грань, то оно ограничено снизу. Покажем, что в этих утверждениях ограниченность сверху (снизу) является не только необходимым, но и достаточным условием существования точных граней.

Теорема 1.3.1. *Если непустое множество A ограничено сверху, то оно имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство. Представим все числа из A в виде бесконечных десятичных дробей, запретив запись с 0 в периоде.

Рассмотрим сначала случай, когда среди чисел множества A есть неотрицательные.

Тогда задача о существовании точной верхней грани всего множества A равносильна такой задаче для неотрицательных чисел из A.

Так как неотрицательные числа из A ограничены сверху, то ограничены сверху и целые части этих чисел. Значит, существует наибольшее число среди этих целых частей. Обозначим его M_0.

Оставим только те числа из A, у которых целая часть равна M_0, и рассмотрим первые десятичные знаки оставшихся чисел. Пусть M_1 — наибольший из первых десятичных знаков.

Будем теперь рассматривать только те числа из A, у которых целая часть и первый десятичный знак равны соответственно M_0 и M_1, т.е. десятичная запись которых начинается с M_0, M_1. Находим наибольший второй десятичный знак у этих чисел и обозначаем его M_2. Снова оставляем только те числа из A, десятичная запись которых начинается с $M_0, M_1 M_2$, и проводим аналогичные рассуждения с третьим десятичным знаком. Продолжая этот процесс, получим бесконечную десятичную дробь $M_0, M_1 M_2 \ldots$. Положим $M := M_0, M_1 M_2 \ldots$ и покажем, что $M = \sup A$.

По построению $M \geqslant x$ для любого $x \in A$. С другой стороны, взяв произвольное число $M' := M'_0, M'_1 M'_2 \ldots$, меньшее M, находим среди чисел $0, 1, 2, \ldots$ наименьшее число k такое, что $M'_k < M_k$. Но среди чисел множества A есть число x', десятичное разложение которого начинается с $M_0, M_1 \ldots M_k$. Значит, для числа x' имеем $M' < x'$ и M действительно является точной верхней гранью множества A.

Пусть теперь множество A содержит только отрицательные числа.

В представлении чисел $x \in A$ в виде бесконечных десятичных дробей $x = -x_0{,}x_1 x_2 \ldots$ находим наименьшее из чисел x_0. Обозначим это наименьшее число M_0.

Оставим только те числа из A, представление которых в виде бесконечной десятичной дроби начинается с $-M_0$.

Найдем наименьший первый десятичный знак у этих чисел и обозначим его M_1. Далее рассматриваем только те числа, десятичное представление которых начинается с $-M_0{,}M_1$. Находим у этих чисел наименьший второй десятичный знак, обозначаем его M_2 и т.д.

Тогда число $M := -M_0{,}M_1M_2\ldots$ является точной верхней гранью множества A. В самом деле, неравенство $x \leqslant M$ выполняется для всех $x \in A$ по построению. А для любого $M' < M$ находим число $x' \in A$ такое, что $x' > M'$, с помощью рассуждений, аналогичных проведенным выше.

Теорема доказана.

Теорема 1.3.2. *Если непустое множество A ограничено снизу, то оно имеет точную нижнюю грань.*

Доказательство. Введем множество B, состоящее из чисел $-x$, где $x \in A$.

Из ограниченности множества A снизу следует ограниченность множества B сверху и, значит, согласно теореме 1.3.1 множество B имеет точную верхнюю грань. Но $-\sup B = \inf A$ и, значит, множество A имеет точную нижнюю грань.

Теорема 1.3.3. *Пусть множество A непусто.*

Если $\forall x \in A$ выполняется неравенство $x \leqslant K$, то $\sup A \leqslant K$.

Если $\forall x \in A$ выполняется неравенство $x \geqslant k$, то $\inf A \geqslant k$.

Если $\forall x \in A$ имеем $x \leqslant K$, то $\sup A$ существует согласно теореме 1.3.1. А неравенство $\sup A \leqslant K$ легко установить от противного, сославшись на условие 2) определения точной верхней грани.

Для точной нижней грани рассуждения аналогичны.

Теорема 1.3.4. *Для любого числа a справедливо равенство $a = \sup \alpha$, где точная верхняя грань берется по всем рациональным числам $\alpha \leqslant a$. При этом можно рассматривать только те $\alpha \leqslant a$, которые записываются конечными десятичными дробями.*

Нужно убедиться только в том, что для любого числа $a' < a$ найдется конечная десятичная дробь α такая, что $a' < \alpha \leqslant a$. А это следует из теоремы 1.2.1.

Точная верхняя и точная нижняя грани множества A могут как принадлежать самому множеству, так и не принадлежать ему. Например, точная нижняя грань множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ — число 1 — принадлежит $\mathbb{N}$. А если A — множество всех положительных чисел, то число $0 = \inf A$ не принадлежит A.

Если $\sup A \in A$, то вместо $\sup A$ часто пишут $\max A$. В аналогичной ситуации вместо $\inf A$ пишут $\min A$. Если же точные грани не принадлежат множеству или их принадлежность множеству неизвестна или не обсуждается, то пишут $\sup$ и $\inf$.

§ 1.4. Сложение чисел

Определим сложение действительных чисел и установим свойства операции сложения.

Определение. *Суммой* чисел a и b называется число

$$a + b := \sup(\alpha + \beta),$$

где точная верхняя грань берется по всем рациональным числам α и β таким, что $\alpha \leqslant a$ и $\beta \leqslant b$.

Сумма $a+b$ определена для любых чисел a и b, так как для всех рассматриваемых α и β значения сумм $\alpha+\beta$ ограничены сверху. В самом деле, если $a = \pm a_0{,}a_1a_2\ldots$ и $b = \pm b_0{,}b_1b_2\ldots$, то $a \leqslant a_0 + 1$ и $b \leqslant b_0 + 1$. Значит, $\alpha \leqslant a_0 + 1$, $\beta \leqslant b_0 + 1$ и $\alpha + \beta \leqslant a_0 + b_0 + 2$.

Выясним свойства операции сложения чисел (вторая группа свойств действительных чисел).

II.1. *Для любых чисел a и b имеем $a+b = b+a$ (коммутативность или переместительное свойство).*

Это свойство вытекает из коммутативности сложения рациональных чисел.

II.2. *Если $a < b$, то для любого числа c имеем $a + c < b + c$.*

Докажем сначала аналогичное свойство для нестрогих неравенств: *Если $a \leqslant b$, то для любого числа c имеем $a + c \leqslant b + c$.*

Действительно, пусть α и γ обозначают рациональные числа. Тогда

$$a + c = \sup_{\alpha \leqslant a,\, \gamma \leqslant c} (\alpha + \gamma).$$

Если заменить здесь условие $\alpha \leqslant a$ на $\alpha \leqslant b$, то точная верхняя грань значений сумм $\alpha + \gamma$ может только увеличиться. Поэтому

$$a + c \leqslant \sup_{\alpha \leqslant b,\, \gamma \leqslant c} (\alpha + \gamma) = b + c.$$

Отсюда вытекает правило сложения одноименных нестрогих неравенств:

Если $a \leqslant b$ и $c \leqslant d$, то $a + c \leqslant b + d$.

Для доказательства прибавляем два раза числа к обеим частям нестрогого неравенства:

$$a + c \leqslant b + c \leqslant b + d.$$

Докажем теперь свойство II.2.

Опираясь на теорему 1.2.1, выберем рациональные числа ξ и η, для которых имеют место неравенства $a < \xi < \eta < b$.

Пользуясь тем, что свойства действий над рациональными числами нам известны, находим такое натуральное число k, что $\eta - \xi > 10^{-k}$, откуда

$$\xi < \eta - 10^{-k}. \tag{1.4.1}$$

Пусть γ_k — k-ое десятичное приближение числа c, т.е. $\gamma_k \leqslant c \leqslant \gamma_k + 10^{-k}$. Складывая неравенства и используя оценку (1.4.1), находим

$$a + c \leqslant \xi + \gamma_k + 10^{-k} < \eta - 10^{-k} + \gamma_k + 10^{-k} = \eta + \gamma_k \leqslant b + c.$$

Таким образом, свойство II.2 доказано.

С помощью свойства II.2 обосновывается правило сложения одноименных строгих неравенств:

Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

Заметим, что если даже заменить здесь одно из неравенств $a < b$ или $c < d$ на нестрогое, то все равно получим строгое неравенство $a + c < b + d$.

II.3. *Для любых чисел a, b и c имеем $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность или сочетательное свойство).*

Введем обозначения $u := (a + b) + c$, $v := a + (b + c)$. Докажем ассоциативность от противного. Предположим, что $u \neq v$. Пусть, например, $u < v$.

Пользуясь теоремой 1.2.1, найдем рациональные числа ξ и η такие, что $u < \xi < \eta < v$, и выберем натуральное n так, чтобы выполнялось неравенство

$$\eta - \xi > 3 \cdot 10^{-n}. \tag{1.4.2}$$

Возьмем n-ые десятичные приближения чисел a, b и c:

$$\alpha_n \leqslant a \leqslant \alpha_n + 10^{-n}, \quad \beta_n \leqslant b \leqslant \beta_n + 10^{-n}, \quad \gamma_n \leqslant c \leqslant \gamma_n + 10^{-n}.$$

Складывая неравенства, находим $\alpha_n + \beta_n \leqslant a + b \leqslant \alpha_n + \beta_n + 2 \cdot 10^{-n}$ и

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n \leqslant (a + b) + c \leqslant \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + 3 \cdot 10^{-n},$$

Если $\omega_n := \alpha_n + \beta_n + \gamma_n$, то $\omega_n \leqslant u \leqslant \omega_n + 3 \cdot 10^{-n}$. Аналогично доказывается неравенство $v \leqslant \omega_n + 3 \cdot 10^{-n}$.

Учитывая (1.4.2), имеем $\xi + 3 \cdot 10^{-n} < \eta < v \leqslant \omega_n + 3 \cdot 10^{-n}$. Отсюда $\xi + 3 \cdot 10^{-n} < \omega_n + 3 \cdot 10^{-n}$ и, так как здесь все числа рациональные, то $\xi < \omega_n$. Но с другой стороны $\omega_n \leqslant u < \xi$ и мы пришли к противоречию.

Сложение чисел было определено для двух слагаемых. Но благодаря ассоциативности сложения можно писать сумму трех и более слагаемых без скобок, указывающих порядок действий.

Если воспользоваться еще свойством коммутативности, то получим, что при сложении чисел можно произвольным образом переставлять и группировать слагаемые.

II.4. *Для любого числа a имеем $a + 0 = a$.*

Действительно,

$$a + 0 = \sup_{\alpha \leqslant a,\, \beta \leqslant 0;\, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}} \alpha + \beta = \sup_{\alpha \leqslant a;\, \alpha \in \mathbb{Q}} \alpha = a,$$

где последнее равенство имеет место согласно теореме 1.3.4.

Отметим, что свойством II.4 обладает только число 0. Действительно, если $0'$ — такое число, что $\forall a$ имеем $a + 0' = a$, то $0' = 0' + 0 = 0$.

II.5. *Для каждого числа a существует число a' такое, что $a + a' = 0$.*

Покажем, что в качестве a' взять число $-a$, т.е. число a с противоположным знаком.

Пусть α_n — n-ые десятичные приближения числа a, т.е. $\alpha_n \leqslant a \leqslant \alpha_n + 10^{-n}$. Тогда для $-a$, как отмечалось при определении неравенств, имеем $-\alpha_n - 10^{-n} \leqslant -a \leqslant -\alpha_n$.

Сложив почленно эти неравенства, получим $-10^{-n} \leqslant a + (-a) \leqslant 10^{-n}$ или $|a + (-a)| \leqslant 10^{-n}$. Так как это неравенство выполняется для всех n, то согласно лемме 1.2.4 отсюда следует равенство $a + (-a) = 0$.

Число a', для которого выполняется равенство $a + a' = 0$, называется числом, противоположным a. Нетрудно видеть, что любого a противоположное число определяется однозначно. Действительно, если наряду с $a + a' = 0$ имеем $a + a'' = 0$, то

$$a'' = a'' + 0 = a'' + (a + a') = (a'' + a) + a' = 0 + a' = a'.$$

Определение. *Разностью* чисел a и b называется число $a - b := a + (-b)$.

Действия сложения и вычитания чисел являются взаимно обратными. В самом деле, для любых a и b имеем

$$(a + b) - b = (a + b) + (-b) = a + (b + (-b)) = a.$$

Аналогично доказывается равенство $(a - b) + b = a$.

Так как действия сложения и вычитания чисел взаимно обратны, то слагаемые из одной части равенств и неравенств можно переносить (с противоположным знаком) в другую их часть.

Теорема 1.4.1. *Для любых чисел a и b справедливо неравенство*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|. \tag{1.4.3}$$

Доказательство. Складывая неравенства $a \leqslant |a|$ и $b \leqslant |b|$, получаем $a + b \leqslant |a| + |b|$. Аналогично, $-(a + b) = -a - b \leqslant |a| + |b|$. Но одно из чисел $a + b$ или $-(a + b)$ равно $|a + b|$, поэтому теорема доказана.

Неравенство (1.4.3) называют неравенством треугольника.

§ 1.5. Умножение чисел

Определение. Если числа a и b неотрицательны, то *произведением* a на b называется число $ab := \sup(\alpha\beta)$, где верхняя грань берется по всем неотрицательным рациональным числам α и β таким, что $\alpha \leqslant a$ и $\beta \leqslant b$.

Если оба числа a и b отрицательны, то $ab := |a||b|$.

Если одно из чисел a и b отрицательно, а другое неотрицательно, то $ab := -(|a||b|)$.

Произведение определено для любой пары чисел. Достаточно убедиться в этом для неотрицательных множителей a и b. Но если $\alpha \leqslant a = a_0, a_1a_2\ldots$ и $\beta \leqslant b = b_0, b_1b_2\ldots$, то $\alpha \leqslant a_0 + 1$, $\beta \leqslant b_0 + 1$, значит, $\alpha\beta \leqslant (a_0 + 1)(b_0 + 1)$ и осталось только сослаться на теорему 1.3.1.

Заметим, что из определения умножения следует, что если хотя бы один из множителей a и b равен нулю, то $ab = 0$.

Перечислим свойства умножения чисел (третья группа свойств действительных чисел).

III.1. *Для любых двух чисел a и b справедливо равенство $ab = ba$ (коммутативность или переместительное свойство).*

III.2. *Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$.*

III.3. *Для любых чисел a, b и c справедливо равенство $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность или сочетательное свойство).*

III.4. *Для каждого числа a справедливо равенство $a \cdot 1 = a$.*

III.5. *Для каждого числа $a \neq 0$ существует число a' такое, что $a \cdot a' = 1$.*

III.6. *Для любых чисел a, b и c справедливо равенство* $(a+b)c = ac + bc$ *(дистрибутивность умножения относительно сложения или распределительное свойство).*

Свойство III.1 вытекает из коммутативности умножения рациональных чисел.

Для доказательства остальных свойства III.2–III.6 не требуется новых соображений по сравнению с доказательствами свойств сложения. Так же, как и там, рассматриваются десятичные приближения чисел и используются леммы 1.2.3 и 1.2.4. Однако, для полного доказательства свойств III.2–III.6 необходимы кропотливые рассуждения, которые мы здесь не приводим.

Из свойства III.2 вытекает правило умножения одноименных неравенств:

Если все числа a, b, c, d неотрицательны, то из $a < b, c < d$ следует $ac < bd$.

Действительно, $ac < bc < bd$.

Легко понять, что это правило имеет место и в том случае, когда одно из чисел a или c отрицательно. Но если отрицательны какие-либо два из чисел a, b, c, d, то полученное таким образом неравенство может оказаться неверным.

В дополнение к свойству III.2 отметим, что

Если $c < 0$, то из $a < b$ следует $ac > bc$.

В самом деле, в силу свойства III.2 имеем $a|c| < b|c|$, откуда $-b|c| < -a|c|$. Но так как $c < 0$, то $|c| = -c$, значит, $bc < ac$ и мы получили требуемое неравенство.

§ 1.6. Непрерывность множества действительных чисел

Для действительных чисел имеют место три группы свойств, касающиеся сравнения чисел, сложения и умножения. Все эти свойства формулируются точно так же, как для рациональных чисел.

Таким образом, мы расширили множество рациональных чисел до множества действительных чисел, сохранив указанные свойства, что дает возможность оперировать с действительными числами по тем же правилам, что и с рациональными числами. В школе это считалось само собой разумеющимся, а теперь такой вывод получил обоснование.

Но действительные числа обладают еще одним свойством, которое для рациональных чисел не выполняется. Это свойство непрерывности множества действительных чисел. В принятом изложении оно формулируется в виде теоремы 1.3.1 о точной верхней грани.

IV. *Для каждого непустого ограниченного сверху множества существует число, являющееся его точной верхней гранью.*

Свойство непрерывности можно выразить и в других терминах. Мы познакомимся еще с формулировкой в терминах последовательностей вложенных отрезков.

§ 1.7. Последовательности вложенных отрезков

Напомним определения числовых промежутков, дававшиеся в школе.

Если $a < b$, то множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называют отрезком (числовым отрезком) и обозначают $[a, b]$. Точки a и b называют концами отрезка, а длиной отрезка называют число $b - a$.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называют интервалом (с концами в точках a и b) и обозначают (a, b). Число $b - a$ называют длиной интервала. Встречающееся в некоторых руководствах обозначение для интервала $]a, b[$ не прижилось.

Рассматривают также полуотрезки $[a, b)$, когда $a \leqslant x < b$, и $(a, b]$, когда $a < x \leqslant b$. Их называют также полуинтервалами.

Таким образом, квадратную скобку пишут, если соответствующая концевая точка принадлежит промежутку, иначе пишут круглую скобку.

Обозначения для бесконечных промежутков: множество чисел x, для которых $x \geqslant a$, обозначают $[a, +\infty)$; для которых $x > a$, обозначают $(a, +\infty)$; для которых $x \leqslant a$, обозначают $(-\infty, a]$; для которых $x < a$, обозначают $(-\infty, a)$. Наконец, все числа образуют интервал $(-\infty, +\infty)$.

Отрезки, интервалы и полуотрезки (как конечные, так и бесконечные) будем называть промежутками.

Если $[a, b] \subset [c, d]$, то говорят, что отрезок $[a, b]$ вложен в отрезок $[c, d]$.

Дадим теперь определение последовательности.

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлен в соответствие некоторый элемент множества A, который будем обозначать x_n, то говорят, что элементы

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

образуют *последовательность.*

Эту последовательность обозначают $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или просто $\{x_n\}$.

Элементы, составляющие последовательность, называют *членами последовательности.*

В этом определении нумерация членов последовательности x_n начинается с $n = 1$. Это не обязательно, иногда бывает удобно начинать нумерацию с нуля. Можно вообще начинать нумерацию с произвольного целого числа.

Отметим, что в отличие от школьного определения мы считаем последовательности бесконечными.

Члены последовательности x_n и x_m при $n \neq m$ не обязательно должны быть разными элементами множества A. Более того, все члены последовательности могут быть одним и тем же элементом. Такие последовательности называют стационарными.

Определим числовые последовательности, сходящиеся к нулю.

Определение. Говорят, что числовая последовательность $x_1, x_2, \ldots$ *сходится к нулю*, если для каждого положительного числа ε существует такое (зависящее от ε) число N, что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство

$$|x_n| < \varepsilon. \tag{1.7.1}$$

Другими словами можно сказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ неравенство (1.7.1) должно выполняться для всех достаточно больших n.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к нулю, то говорят, что члены этой последовательности (т.е. числа x_n) стремятся к нулю.

Теорема 1.7.1. *Пусть задана последовательность отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, где каждый следующий отрезок вложен в предыдущий. Если последовательность длин этих отрезков сходится к нулю, то существует и притом только одно число, принадлежащее всем отрезкам $[a_n, b_n]$.*

Доказательство. Так как все отрезки $[a_n, b_n]$ содержатся в $[a_1, b_1]$, то последовательность $\{a_n\}$ левых концов отрезков ограничена сверху числом b_1.

Рассмотрим число $c := \sup_n a_n$. Сначала докажем, что c принадлежит всем отрезкам $[a_n, b_n]$, а затем убедимся, что этим свойством обладает только одно число.

По определению точной верхней грани $\forall n$ имеем $a_n \leqslant c$. С другой стороны, если бы для некоторого k мы имели $b_k < c$, то по определению точной верхней грани нашелся бы такой номер m, что $b_k < a_m$. Но тогда отрезки $[a_k, b_k]$ и $[a_m, b_m]$ не имели бы общих точек, что противоречит условию, что отрезки вложены. Итак, $\forall k$ имеем $c \leqslant b_k$, значит, $c \in [a_k, b_k]$ для всех k.

Докажем единственность. Пусть существуют неравные между собой числа c и d, принадлежащие всем отрезкам $[a_n, b_n]$, и для определенности $c < d$. Тогда из условий $a_n \leqslant c$ и $d \leqslant b_n$ находим $b_n - a_n \geqslant d - c > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, т.е. последовательность длин отрезков не сходится к нулю. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Заметим, что в условиях этой теоремы нельзя заменить отрезки $[a_n, b_n]$ на интервалы (a_n, b_n).

В самом деле, для последовательности интервалов $(0, 2^{-n})$ каждый следующий интервал вложен в предыдущий и последовательность длин этих интервалов $\{2^{-n}\}$ сходится к нулю. Но никакое число не может принадлежать всем этим интервалам.

Теорема 1.7.1 позволяет закончить исследование связи действительных чисел и точек числовой прямой.

В § 1.1 было показано, как по точке на числовой прямой найти соответствующую ей бесконечную десятичную дробь. При рассмотрении обратной задачи о построении точки, соответствующей заданной бесконечной десятичной дроби, было показано, что искомая точка должна принадлежать всем отрезкам некоторой последовательности вложенных отрезков, длина каждого из которых в 10 раз меньше длины предыдущего. Но вопрос о существовании такой точки оставался открытым. Теперь мы знаем, что общая всем этим отрезкам точка существует. Значит, каждому действительному числу соответствует и притом только одна точка числовой прямой.

Введем понятие взаимно однозначного соответствия между множествами.

Определение. Говорят, что между множествами A и A' установлено *взаимно однозначное соответствие*, если каждому элементу $x \in A$ поставлен в соответствие элемент $x' \in A'$ и при этом каждый элемент множества A' соответствует и притом только одному элементу из множества A. Такое соответствие элементов будем обозначать $x \leftrightarrow x'$.

Используя это понятие, можно сказать, что между точками числовой прямой и действительными числами установлено взаимно однозначного соответствие. Поэтому часто точки числовой прямой называют числами и, наоборот, числа называют точками.

Мы получили теорему 1.7.1 о вложенных отрезках как следствие теоремы 1.3.1 о точной верхней грани.

Покажем, что из теоремы о вложенных отрезках можно вывести теорему о точной верхней грани.

Пусть A — непустое ограниченное сверху множество. Значит, существует число L такое, что $\forall x \in A$ имеем $x < L$. Возьмем произвольное число $x_0 \in A$ и введем отрезок $[a_1, b_1] := [x_0, L]$. Заметим, что отрезок $[a_1, b_1]$ содержит точки из A, а правее этого отрезка точек из A нет.

Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из полученных отрезков, который сам содержит точки из A, а правее его точек из A нет. По построению $b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2$.

На следующем шаге делим отрезок $[a_2, b_2]$ пополам и выбираем такой из отрезочков, что сам он содержит точки из A, а правее его точек из A нет.

Продолжив этот процесс неограниченно, получим последовательность вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \ldots$, каждый из которых содержит точки из A, а правее его точек из A нет. Кроме того, по построению $b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1}$, значит, последовательность длин отрезков сходится к нулю. По теореме о вложенных отрезках существует единственная точка c, принадлежащая всем этим отрезкам.

Покажем, что эта точка $c = \sup A$.

1) Для всех $x \in A$ имеем $x \leqslant c$. Действительно, если бы существовала точка $x^* \in A$ такая, что $x^* > c$, то мы взяли бы отрезок $[a_n, b_n]$, длина которого меньше $x^* - c$. Т.е. $x^* - c > b_n - a_n$, откуда $x^* > b_n - a_n + c$. Так как этот отрезок содержит точку c, то $a_n \leqslant c$ и, значит, $x^* > b_n$. Но по построению точек множества A, лежащих правее отрезков $[a_n, b_n]$, нет.

2) Возьмем произвольное число $c' < c$ и найдем отрезок $[a_n, b_n]$, длина которого меньше $c - c'$. Этот отрезок содержит точку c и, значит, не может содержать c' (здесь, как и выше, приведенное рассуждение на геометрическом языке легко записать в виде неравенств). Но в каждом отрезке $[a_n, b_n]$ есть точки из A, значит, правее точки c' есть хотя бы одна точка из A.

Итак, мы доказали, что $c = \sup A$.

Таким образом, теорема о точной верхней грани и теорема о вложенных отрезках эквивалентны.

§ 1.8. Счетные и несчетные множества

Рассматрим вопросы, связанные со сравнением множеств по количеству содержащихся в них элементов.

Для конечных множеств (т.е. множеств из конечного числа элементов) задача решается просто, так как количество элементов конечного множества выражается натуральным числом.

В случае, когда не имеет значения, сколько именно элементов содержат конечные множества A и B, а нужно знать только, в каком из них элементов больше, удобно использовать следующее соображение.

Если можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами множества A и элементами некоторого подмножества множества B, то число элементов множества A не больше, чем число элементов в B.

Такой подход кладется в основу сравнения количества элементов бесконечных (т.е. не являющихся конечными) множеств.

Определение. Говорят, что два множества имеют *одинаковую мощность* (являются *равномощными*), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Если множество A имеет одинаковую мощность с некоторым подмножеством множества B, то говорят, что мощность множества A *меньше или равна* мощности множества B.

Определение. Множество называется *счетным*, если оно имеет одинаковую мощность с множеством натуральных чисел.

Заметим, что *счетность множества эквивалентна возможности представить все его элементы в виде последовательности*

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots, \tag{1.8.1}$$

в которой каждый элемент множества участвует один раз.

Действительно, если множество A счетно, т.е. имеется взаимно однозначное соответствие элементов A и $\mathbb{N}$, то можно представить все элементы множества A в виде последовательности, записав сначала элемент, соответствующий числу 1, затем элемент, соответствующий числу 2, и т.д.

Наоборот, если все элементы множества A записаны в виде последовательности (1.8.1), то поставив элемент a_k в соответствие числу k, получим взаимно однозначное соответствие множеств A и $\mathbb{N}$.

Счетные множества — самые "маленькие" среди бесконечных множеств. Действительно, пусть множество A бесконечно. Возьмем некоторый элемент из A, обозначаем его a_1. В силу бесконечности A в A, кроме a_1, есть еще другие элементы. Выбираем какой-либо из них и обозначаем его a_2. Продолжая неограниченно этот процесс, получим счетное подмножество множества A. Таким образом, *каждое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Рассмотрим примеры счетных множеств.

Почти очевидный пример — счетность множества $\mathbb{Z}$. Действительно, все целые числа можно представить в виде последовательности

$$0,\, 1,\, -1,\, 2,\, -2,\, \ldots.$$

Теорема 1.8.1. *Множество рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Теорема будет доказана, если мы построим последовательность, содержащую все рациональные числа (каждое рациональное число должно участвовать в этой последовательности только один раз). Для этого строим сначала последовательности, содержащие все отличные от нуля рациональные числа с фиксированными знаменателями:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{1} & & \frac{-1}{1} & & \frac{2}{1} & & \frac{-2}{1} & & \ldots. \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{-1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{-2}{2} & & \ldots. \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{3} & & \frac{-1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{-2}{3} & & \ldots. \\
 & \diagup & & \diagup & & \diagup & & & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots.
\end{array}$$

Теперь пишем число 0, а затем записываем числа, двигаясь в построенной бесконечной таблице по диагоналям. Перед тем, как написать очередное число, проверяем, что этого числа нет среди уже записанных.

Так получим нужную последовательность.

Теорема 1.8.2. *Множество действительных чисел несчетно.*

Доказательство. Покажем, что несчетно множество действительных чисел из интервала $(0, 1)$.

Предположим, что это утверждение неверно и существует последовательность

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, \tag{1.8.2}$$

содержащая все числа из $(0, 1)$. Пусть $x_n = 0{,}x_{n1}x_{n2}\ldots$, $n = 1, 2, \ldots$ — представление чисел x_n в виде бесконечных десятичных дробей. Мы считаем, что выбрана какая-либо одна форма записи бесконечных десятичных дробей — или с 0, или с 9 в периоде. Запишем эти представления в виде бесконечной таблицы:

$$\begin{array}{l}
x_1 = 0{,}x_{11}x_{12}x_{13}\ldots \\
x_2 = 0{,}x_{21}x_{22}x_{23}\ldots \\
x_3 = 0{,}x_{31}x_{32}x_{33}\ldots \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}$$

Построим число из интервала $(0,1)$, которого в последовательности (1.8.2) нет.

Положим $a := 0,a_1a_2\ldots$, где все десятичные знаки a_i выбираем среди цифр $1, 2, \ldots, 8$ так, чтобы выполнялись неравенства $a_1 \neq x_{11}$, $a_2 \neq x_{22}, \ldots$. Тогда в записи числа a в виде бесконечной десятичной дроби цифры 0 и 9 не участвуют вовсе, и число a не может равняться ни одному из чисел x_n, так как $a_n \neq x_{nn}$ для всех n. Теорема доказана.

Определение. Множества, имеющие одинаковую мощность с отрезком $[0,1]$, называют множествами мощности *континуум.*

В этом определении можно было говорить об одинаковой мощности с интервалом $(0,1)$, так как нетрудно установить взаимно однозначное соответствие отрезка $[0,1]$ и интервала $(0,1)$.

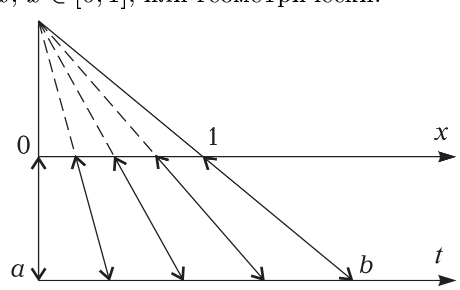
Это можно сделать, например, так. Выделим произвольное счетное множество $A \subset (0,1)$. Запишем все элементы A в виде последовательности $a_1, a_2, \ldots$ (все элементы этой последовательности различны) и рассмотрим последовательность B, имеющую вид $0, 1, a_1, a_2, \ldots$.

Всем числам из $(0,1)$, не входящим в A, ставим в соответствие их самих как элементы из $[0,1]$. А последовательности A и B записываем одну под другой

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots, \\ 0, & 1, & a_1, & a_2, & \ldots \end{matrix}$$

и ставим в соответствие друг другу элементы из одного столбца.

В определении множеств мощности континуум не имеет значения и тот факт, что берется именно отрезок $[0,1]$. Можно было брать любой отрезок $[a,b]$, так как взаимно однозначное соответствие между $[0,1]$ и $[a,b]$ легко установить с помощью формулы $t = a + (b-a)x$, $x \in [0,1]$, или геометрически:



В дальнейшем мы увидим, что множество всех действительных чисел также имеет мощность континуум.

Глава 2
ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 2.1. Определение предела последовательности

Напомним определение последовательности элементов произвольного множества A, данное в § 1.7. Если каждому натуральному числу n поставлен в соответствие некоторый элемент x_n из множества A, то говорят, что элементы

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

образуют последовательность $\{x_n\}$.

В этой главе в основном рассматриваются числовые последовательности. Для краткости будем называть их просто последовательностями.

Определение. Число a называют *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для каждого положительного ε существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{2.1.1}$$

В этом случае пишут

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_n x_n = \lim x_n \tag{2.1.2}$$

или

$$x_n \to a, \quad n \to \infty.$$

При $a = 0$ это определение было дано в § 1.7, когда говорилось о последовательностях, сходящихся к нулю.

Неравенство (2.1.1) равносильно двойному неравенству $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ и, значит, равносильно двойному неравенству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, которое означает, что

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Определение. Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называют *ε-окрестностью* точки a.

Используя понятие ε-окрестности, определение предела можно сформулировать так. Число a называется пределом последовательности, если для каждого положительного числа ε все члены последовательности, начиная с некоторого, принадлежат ε-окрестности точки a.

Определение. Если последовательность имеет предел, ее называют *сходящейся*. Если последовательность не имеет предела, ее называют *расходящейся*.

Если число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, то говорят, что последовательность сходится к a. Про члены последовательности (числа x_n) говорят, что они сходятся или стремятся к a.

Отметим, что сходимость или расходимость последовательности и значение предела, если последовательность сходится, не зависят от ее начальных членов.

Теорема 2.1.1. *Предел сходящейся последовательности определяется однозначно.*

Доказательство. Предположим противное — пусть числа a и b являются пределами последовательности $\{x_n\}$ и $a \neq b$, для определенности $a < b$. Возьмем $\varepsilon := (b-a)/2$. Это число положительное.

Пользуясь сходимостью последовательности к a, находим N_1 такое, что

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \tag{2.1.3}$$

для всех $n > N_1$. Точно также в силу сходимости последовательности к b находим N_2 такое, что

$$b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon \tag{2.1.4}$$

для всех $n > N_2$. Поэтому, если $n > N := \max(N_1, N_2)$, то выполняются оба неравенства: и (2.1.3) и (2.1.4). Так как

$$a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

и $b - \varepsilon = (a+b)/2$, то из правого неравенства (2.1.3) и левого неравенства (2.1.4) следует, что для $n > N$

$$x_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = b - \varepsilon < x_n,$$

и мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

При доказательстве теоремы рассматривались неравенства (2.1.3) и (2.1.4), которые имели место первое для $n > N_1$ и второе для $n > N_2$. Чтобы выполнялись оба эти неравенства, мы брали $n > N = \max(N_1, N_2)$. Такой прием будет часто использоваться в дальнейшем без дополнительных пояснений.

§ 2.2. Свойства пределов, связанные с неравенствами

Теорема 2.2.1. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $a := \lim\limits_n x_n$. Взяв $\varepsilon = 1$, находим N такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < 1$. Тогда для этих n

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leqslant |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Поэтому, если положить $L := \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, 1 + |a|)$, то получим $|x_n| \leqslant L$ для всех n, т.е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Теорема 2.2.2. *Если* $\lim\limits_n x_n = a \neq 0$, *то существует число* N *такое, что для всех* $n > N$

$$|x_n| > \frac{1}{2}\,|a|.$$

При этом, если $a > 0$, *то* $x_n > a/2$, *а если* $a < 0$, *то* $x_n < a/2$.

Доказательство. Взяв $\varepsilon := |a|/2$, найдем N такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \frac{1}{2}\,|a|.$$

Тогда

$$a - \frac{1}{2}\,|a| < x_n < a + \frac{1}{2}\,|a|. \tag{2.2.1}$$

Если $a > 0$, то $|a| = a$ и пользуемся левым неравенством (2.2.1). А если $a < 0$, то $|a| = -a$ и пользуемся правым неравенством (2.2.1).

Теорема доказана.

Теорема 2.2.3. *Если последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся и* $x_n \leqslant y_n$ *для всех* n, *то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство. Пусть $a := \lim x_n$ и $b := \lim y_n$. Нужно доказать, что $a \leqslant b$.

Предположим, что это неравенство неверно и $a > b$. Возьмем $\varepsilon := (a-b)/2$. Так как $\varepsilon > 0$, то существует N такое, что для всех $n > N$

$$x_n > a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

и

$$y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Таким образом, имеем

$$y_n < \frac{a+b}{2} < x_n,$$

что противоречит условию. Теорема доказана.

Заметим, что выполнение неравенства $x_n \leqslant y_n$ можно было требовать не для всех n, а только для всех достаточно больших n. Подобное замечание можно будет сделать и к некоторым последующим теоремам, но мы не будем заострять на этом внимание.

Более существенное замечание состоит в следующем. Если в теореме 2.2.3 вместо нестрогих неравенств $x_n \leqslant y_n$ предполагать выполнение строгих неравенств $x_n < y_n$, то все равно можно было бы утверждать справедливость только нестрогого неравенства $\lim x_n \leqslant \lim y_n$. Это видно на примере последовательностей $x_n := 0$ и $y_n := 1/n$, для которых $x_n < y_n$ и $\lim x_n = \lim y_n = 0$. Таким образом, необходимо соблюдать следующее правило:

Если существуют пределы выражений из левой и из правой частей строгого неравенства, то при переходе в этом неравенстве к пределу строгое неравенство нужно заменить на нестрогое.

Теорема 2.2.4. *Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу и $x_n \leqslant y_n$ для всех n. Тогда любая последовательность $\{z_n\}$ такая, что $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ для всех n, сходится к тому же пределу.*

Доказательство. Обозначим $a := \lim x_n = \lim y_n$. Для каждого $\varepsilon > 0$ находим N такое, что для всех $n > N$ выполняются неравенства $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ и $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$. Тогда для этих n

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon,$$

т.е. $z_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и теорема доказана.

Теорема 2.2.5. *Если $x_n \to a$, $n \to \infty$, то $|x_n| \to |a|$, $n \to \infty$.*

Это утверждение имеет место в силу неравенства

$$\big|\,|x_n| - |a|\,\big| \leqslant |x_n - a|,$$

которое является простым следствием неравенства треугольника (1.4.3).

§ 2.3. Арифметические свойства пределов

Теорема 2.3.1. *Пусть последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся. Тогда*

1°. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$*;*

2°. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$*;*

3°. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$*;*

4°. *Если* $y_n \neq 0$ *для всех* n *и* $\lim\limits_{n} y_n \neq 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Здесь в каждом из случаев 1°–4° содержатся два утверждения: во-первых, существование предела выражения, стоящего в левой части равенства, а во-вторых, равенство этого предела выражению, стоящему в правой части.

Кратко эту теорему обычно формулируют так: предел суммы равен сумме пределов; предел разности равен разности пределов; предел произведения равен произведению пределов; предел частного равен частному пределов. В последнем утверждении, разумеется, имеется в виду, что ни члены последовательности делителей, ни предел этой последовательности не равны нулю.

Доказательство. Пусть $a := \lim x_n$ и $b := \lim y_n$.

1°–2°. По заданному $\varepsilon > 0$ выбираем N так, чтобы для всех $n > N$ выполнялись неравенства

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда находим

$$|(x_n+y_n)-(a+b)| = |(x_n-a)+(y_n-b)| \leqslant |x_n-a|+|y_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Точно также

$$|(x_n - y_n) - (a - b)| = |(x_n - a) - (y_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon.$$

Таким образом, утверждения 1° и 2° доказаны.

3°. Сначала установим вспомогательное неравенство. Имеем

$$|x_n y_n - ab| = |(x_n y_n - a y_n) + (a y_n - ab)| \leqslant |x_n - a|\,|y_n| + |a|\,|y_n - b|. \tag{2.3.1}$$

В силу сходимости последовательности $\{y_n\}$ она ограничена, поэтому можно выбрать число L такое, что $|y_n| < L$ для всех n и $|a| < L$. Тогда из (2.3.1) вытекает, что

$$|x_n y_n - ab| \leqslant L|x_n - a| + L|y_n - b|. \tag{2.3.2}$$

Теперь по заданному $\varepsilon > 0$ находим число N такое, что для всех $n > N$ выполняются оценки

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

Пользуясь этими оценками, из (2.3.2) находим, что для всех $n > N$

$$|x_n y_n - ab| < L\frac{\varepsilon}{2L} + L\frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon,$$

и свойство 3° доказано.

4°. Обоснование этого утверждения также начнем с доказательства вспомогательного неравенства. Имеем

$$\begin{gathered}\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_n}{b}\right) + \left(\frac{x_n}{b} - \frac{a}{b}\right)\right| \leqslant \left|x_n\left(\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right)\right| + \\ + \left|\frac{1}{b}\,(x_n - a)\right| = \frac{|x_n|}{|y_n|\,|b|}|b - y_n| + \frac{1}{|b|}|x_n - a|.\end{gathered} \tag{2.3.3}$$

Так как $b \neq 0$, то согласно теореме 2.2.2 существует число N_1 такое, что $|y_n| > |b|/2$ для всех $n > N_1$. Последовательность $\{x_n\}$ в силу ее сходимости ограничена. Пусть число L таково, что $|x_n| < L$ для всех n.

Тогда согласно (2.3.3) для $n > N_1$ справедлива оценка

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| \leqslant \frac{2L}{b^2}|b - y_n| + \frac{1}{|b|}|x_n - a|. \tag{2.3.4}$$

Теперь для произвольного положительного ε выбираем число $N > N_1$ такое, что для всех $n > N$ справедливы оценки

$$|x_n - a| < \varepsilon\,\frac{|b|}{2}, \quad |b - y_n| < \varepsilon\,\frac{b^2}{4L}.$$

Тогда из (2.3.4) следует, что для всех $n > N$

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

§ 2.4. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение. Последовательность называется *бесконечно малой* (или *исчезающей*), если она сходится к нулю.

Обозначение для бесконечно малой последовательности

$$a_n = o(1), \quad n \to \infty.$$

Символ $o(1)$ читается "o-малое от единицы".

Определение. Последовательность $\{b_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для каждого числа L существует такое число $N = N(L)$, что для всех $n > N$ выполняется оценка $|b_n| > L$.

В этом случае пишут $\lim b_n = \infty$ и говорят, что последовательность $\{b_n\}$ имеет пределом ∞.

При этом, если для всех достаточно больших n имеем $b_n > 0$, то пишут $\lim b_n = +\infty$, а если $b_n < 0$, то пишут $\lim b_n = -\infty$.

Эти определения можно сформулировать иначе.

Определение. Если для каждого числа L существует такое число N, что для всех $n > N$ выполняется оценка $b_n > L$, то говорят, что последовательность $\{b_n\}$ имеет пределом $+\infty$ и пишут $\lim b_n = +\infty$.

Если для каждого числа L существует такое число N, что для всех $n > N$ выполняется оценка $b_n < L$, то говорят, что последовательность $\{b_n\}$ имеет пределом $-\infty$ и пишут $\lim b_n = -\infty$.

В соответствии со сказанным в § 2.1 последовательности, имеющие бесконечные пределы, следует называть расходяшимися. Но обычно от этого правила отступают и называют такие последовательности сходящимися. Чтобы избежать недоразумений, условимся, что когда говорится о сходящейся последовательности, то это всегда будет означать, что она имеет конечный предел. А в тех случаях, когда последовательность может иметь и бесконечный предел, это будет оговариваться.

Заметим, что последовательность может сходиться к ∞, но при этом не сходиться ни к $+\infty$, ни к $-\infty$. Так будет, например, для последовательности $\{(-1)^n n\}$.

Отметим простейшие свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность, причем $x_n \neq 0$ для всех n, то $\{1/x_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $L := 1/\varepsilon$. Теперь по L находим N такое, что $|x_n| > L$ для всех $n > N$. Тогда для этих n имеем $|1/x_n| = 1/|x_n| < 1/L = \varepsilon$ и наше утверждение доказано.

Если $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $x_n \neq 0$ для всех n, то $\{1/x_n\}$ — бесконечно большая последовательность. Доказательство этого свойства аналогично.

Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — бесконечно малые последовательности, то бесконечно малыми являются и последовательности $\{a_n + b_n\}$ и $\{a_n - b_n\}$. Это следует из свойств пределов сходящихся последовательностей.

Если последовательность $\{a_n\}$ бесконечно малая, а последовательность $\{b_n\}$ ограниченная, то последовательность $\{a_n \cdot b_n\}$ бесконечно малая. Действительно, по условию существует такое число L, что $|b_n| < L$ для всех n. Поэтому справедливо неравенство $|a_n\, b_n| \leqslant L\,|a_n|$, из которого высказанное утверждение легко выводится. Заметим, что его нельзя получить из свойств пределов сходящихся последовательностей, так как сходимость последовательности $\{b_n\}$ не предполагалась.

Для обозначения ограниченности последовательности $\{b_n\}$ используется запись
$$b_n = O(1), \quad \forall\, n.$$
Символ $O(1)$ читается “O-большое от единицы”.

§ 2.5. Предел монотонной последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонной*, если она не убывает, т.е. $x_n \leqslant x_{n+1}$ для всех n, или не возрастает, т.е. $x_n \geqslant x_{n+1}$ для всех n.

Вместо “не убывает” обычно будем говорить “возрастает”, допуская в этом случае и нестрогое возрастание. Там же, где будет важно, что для всех n выполняется строгое неравенство $x_n < x_{n+1}$, будем говорить, что последовательность “строго возрастает”. Точно также вместо “не возрастает” будем говорить “убывает”.

Теорема 2.5.1. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ возрастает. Тогда*

1°. *если последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху числом B, то она сходится и $\lim\limits_n x_n \leqslant B$;*

2°. *если последовательность* $\{x_n\}$ *не является ограниченной сверху, то* $\lim\limits_n x_n = +\infty$.

Доказательство. 1°. Так как $x_n \leqslant B$ для всех n, то существует точная верхняя грань $M := \sup\limits_n x_n$ и $M \leqslant B$. Покажем, что M является пределом последовательности $\{x_n\}$.

Поскольку M — точная верхняя грань, то $x_n \leqslant M$ для всех n и для каждого $\varepsilon > 0$ существует число x_p такое, что $x_p > M - \varepsilon$. Но тогда для всех $n > p$ имеем $M - \varepsilon < x_p \leqslant x_n$. Таким образом, для всех $n > p$ выполняются неравенства $M - \varepsilon < x_n \leqslant M$. Это показывает, что $M = \lim\limits_n x_n$.

2°. Если последовательность $\{x_n\}$ не является ограниченной сверху, то для любого L существует число x_q такое, что $x_q > L$. В силу возрастания последовательности отсюда следует, что для всех $n > q$ выполняются неравенства $x_n \geqslant x_q > L$, а это и означает, что $\lim\limits_n x_n = +\infty$.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается теорема о пределе убывающей последовательности.

Рассмотрим два примера.

1°. Докажем, что если $|q| < 1$, то $\lim\limits_n q^n = 0$.

Пусть сначала $0 < q < 1$. Тогда $\{q^n\}$ – убывающая ограниченная снизу последовательность. Значит, она имеет предел. Пусть $a := \lim\limits_n q^n$.

Последовательность $\{q^{n+1}\}$ имеет этот же предел: $\lim\limits_n q^{n+1} = a$. Но по теореме о пределе произведения последовательностей $\lim\limits_n q^{n+1} = \lim\limits_n (q^n \cdot q) = (\lim\limits_n q^n) \cdot q = aq$. Таким образом, $a = aq$, а это возможно только при $a = 0$ и мы доказали, что $\lim\limits_n q^n = 0$ для положительных q.

Для отрицательных q пользуемся тем, что $|q^n| = |q|^n$.

2^0. Покажем, что для произвольного числа a

$$\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0, \tag{2.5.1}$$

где, напомним, $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Как и в предыдущем примере, достаточно рассмотреть только положительные a.

Пусть m – натуральное число такое, что $m + 1 > a$. Для $n > m$

имеем

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{(m+1)\ldots n} \leqslant \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{(m+1)^{n-m}} = \frac{(m+1)^m}{m!} \cdot \frac{1}{(m+1)^n},$$

откуда

$$\frac{a^n}{n!} \leqslant \frac{(m+1)^m}{m!} \cdot \left(\frac{a}{m+1}\right)^n. \tag{2.5.2}$$

Из $a/(m+1) < 1$ по доказанному в первом примере следует, что

$$\left(\frac{a}{m+1}\right)^n \to 0, \quad n \to \infty,$$

а это в силу (2.5.2) приводит к (2.5.1).

§ 2.6. Число e

Нам будет нужно следующее неравенство, которое называют неравенством Бернулли.

Лемма 2.6.1. *Если $m \geqslant 2$ — натуральное число и $x > 0$, то справедлива оценка*

$$(1+x)^m > 1 + mx. \tag{2.6.1}$$

Доказательство. Для $m = 2$ доказательство элементарно:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x.$$

Дальнейшие рассуждения проведем методом математической индукции.

Предположим, что для показателя m неравенство (2.6.1) уже доказано, и установим его для показателя $m+1$. Имеем

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)^m(1+x) > (1+mx)(1+x) =$$
$$= 1 + (m+1)x + mx^2 > 1 + (m+1)x.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.6.2. *Последовательность $\{x_n\}$, где*

$$x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.6.2}$$

сходится.

Доказательство. Докажем сходимость последовательности $\{y_n\}$, где

$$y_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Отсюда будет вытекать сходимость последовательности $\{x_n\}$ и равенство обоих пределов, так как

$$x_n = y_n \Big/ \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Последовательность $\{y_n\}$ ограничена снизу, поскольку $y_n > 1$ для всех n. Покажем, что члены последовательности $\{y_n\}$ монотонно убывают. Для этого рассмотрим отношение

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2}{n\,(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n\,(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}.$$

В силу неравенства Бернулли (2.6.1) отсюда следует, что

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} > \left(1 + \frac{n+2}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1.$$

Таким образом, $y_n > y_{n+1}$ для всех n. Поэтому согласно теореме о пределе монотонной последовательности предел $\lim y_n$ существует и теорема доказана.

Следуя Эйлеру, предел последовательности (2.6.2) обозначают e. Наряду с π число e является одной из наиболее важных констант в математике. Десятичное представление числа e имеет вид

$$e = 2{,}718\ldots$$

В § 6.5 будет показано, что e — иррациональное число.

§ 2.7. Подпоследовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса

Пусть задана последовательность $\{x_n\}$. Выберем некоторую строго возрастающую последовательность натуральных чисел $n_1 < < n_2 < \ldots$. Последовательность $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\} = \{x_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Таким образом, в этом случае каждое число x_{n_k} является членом последовательности $\{x_n\}$ и, кроме того, в последовательности $\{x_{n_k}\}$ сохраняется тот же порядок следования элементов, какой они имели в исходной последовательности. Образно говоря, мы записываем подряд все члены последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots$, "вычеркиваем" некоторые ее элементы, оставляя бесконечно много элементов, и эту оставшуюся последовательность называем подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Понятно, что если последовательность сходится, то и любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу. Это верно и для конечных и для бесконечных пределов.

Определение. Предел подпоследовательности называется *частичным пределом* последовательности.

Здесь имеются в виду как конечные, так и к бесконечные пределы.

Из определения частичного предела следует, что число a является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, если каждая окрестность a содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$.

Частичный предел последовательности может не быть ее пределом. Например, частичными пределами последовательности $\{(-1)^n\}$, являются числа $+1$ и -1, а предела у этой последовательности нет.

Теорема 2.7.1 (Теорема Больцано–Вейерштрасса). *Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. Рассмотрим отрезок $[a, b]$, содержащий все члены последовательности $\{x_n\}$.

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Тогда по крайней мере один из получившихся отрезков содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из этих отрезков, который содержит бесконечно много членов заданной последовательности, а если оба отрезка обладают этим свойством, то — любой из них. Выберем произвольный элемент последовательности $\{x_n\}$, принадлежащий отрезку $[a_1, b_1]$. Пусть это будет x_{n_1}.

Разделим теперь пополам отрезок $[a_1, b_1]$ и обозначим через $[a_2, b_2]$ один из получившихся отрезков, который содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Возьмем элемент последовательности $\{x_n\}$, принадлежащий отрезку $[a_2, b_2]$ и такой, что его индекс n_2 больше, чем n_1. Так выбран элемент x_{n_2}.

На следующем шаге делим отрезок $[a_2, b_2]$ пополам, берем отрезок $[a_3, b_3]$, содержащий бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, и выбираем в нем элемент x_{n_3} такой, что $n_3 > n_2$.

Продолжив этот процесс, получим, во-первых, последовательность вложенных отрезков $\{[a_k, b_k]\}$, каждый из которых содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, а длины отрезков $[a_k, b_k]$ стремятся к нулю и, во-вторых, последовательность точек $\{x_{n_k}\}$ таких, что $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$.

По теореме о вложенных отрезках существует точка, принадлежащая всем отрезкам $[a_k, b_k]$. Обозначим эту точку c и покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Так как длины отрезков $[a_k, b_k]$ стремятся к нулю, то все эти отрезки, начиная с некоторого, содержатся в ε-окрестности точки c, а вместе с ними в эту окрестность попадут и соответствующие члены последовательности $\{x_{n_k}\}$. Значит, x_{n_k} при $k \to \infty$ сходятся к c.

Теорема доказана.

Заметим, что если все элементы последовательности принадлежат отрезку $[a, b]$, то и все ее частичные пределы принадлежат $[a, b]$.

Покажем, что среди частичных пределов ограниченной последовательности есть наибольший.

Теорема 2.7.2. *Если последовательность ограничена, то точная верхняя грань ее частичных пределов сама является частичным пределом.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена и A — множество ее частичных пределов. Обозначим $a := \sup A$ и покажем, что в каждой окрестности числа a содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$.

По определению точной верхней грани для произвольного $\varepsilon > 0$ в ε-окрестности числа a найдется число a^*, являющаяся частичным пределом последовательности $\{x_n\}$. Возьмем настолько малую окрестность точки a^*, чтобы она целиком содержалась в указанной ε-окрестности точки a. Этой окрестности точки a^* принадлежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, которые, таким образом, принадлежат и рассматриваемой ε-окрестности точки a.

Теорема доказана.

Понятно, что и точная нижняя грань частичных пределов ограниченной последовательности является ее частичным пределом.

Определение. Точная верхняя грань частичных пределов ограниченной последовательности называется *верхним пределом*, а точная нижняя грань частичных пределов называется *нижним пределом* этой последовательности.

Верхний и нижний пределы последовательности $\{x_n\}$ обозначают соответственно
$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n, \quad \varliminf_{n\to\infty} x_n.$$

Если последовательность $\{x_n\}$ не является ограниченной сверху, то из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $+\infty$.

Действительно, выбираем сначала число x_{n_1} такое, что $x_{n_1} > 1$. Затем находим такой номер $n_2 > n_1$, что для x_{n_2} выполняется неравенство $x_{n_2} > 2$, и т.д. В результате получим $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

В этом случае верхним пределом последовательности $\{x_n\}$ называют $+\infty$

Аналогично из последовательности, не ограниченной снизу, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $-\infty$, и в этом случае $-\infty$ называют нижним пределом последовательности.

Таким образом, верхний и нижний пределы определены для любой последовательности.

Теорема Больцано–Вейерштрасса относилась к ограниченным последовательностям. Для произвольных последовательностей соответствующее утверждение формулируется следующим образом.

Теорема 2.7.3. *Из каждой последовательности можно выделить подпоследовательность, имеющую предел, конечный или бесконечный.*

Отметим свойства верхних пределов, связанные с арифметическими действиями над последовательностями (аналогичными свойствами обладают и нижние пределы).

Ясно, что для произвольных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ равенство
$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$
может не выполняться. Но если одна из этих последовательностей имеет конечный предел, то такое равенство уже имеет место.

При этом, чтобы не предполагать конечность верхнего предела второй последовательности, положим по определению, что сумма числа и бесконечного символа равна этому бесконечному символу.

Теорема 2.7.4. *Если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то для любой последовательности $\{y_n\}$ справедливо ра-*

венство

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n. \tag{2.7.1}$$

Доказательство. Если верхний предел последовательности $\{y_n\}$ бесконечен, то равенство (2.7.1) вытекает из определения бесконечных пределов.

Будем теперь считать верхний предел $\varlimsup\limits_{n} y_n$ конечным.

Пусть $\lim\limits_{n} x_n = a$. Из теоремы о пределе суммы следует, что если некоторое число b является частичным пределом последовательности $\{y_n\}$, то $a+b$ является частичным пределом последовательности $\{x_n+y_n\}$.

Аналогично, если из частичного предела последовательности $\{x_n+y_n\}$ вычесть a, то получим частичный предел для $\{y_n\}$. Поэтому точная верхняя грань частичных пределов $\{x_n+y_n\}$ равна сумме числа a и точной верхней грани частичных пределов $\{y_n\}$, а это и есть утверждение теоремы.

Теорема 2.7.5. *Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — неотрицательные последовательности, последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, а последовательность $\{y_n\}$ — конечный верхний предел. Тогда*

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}y_n. \tag{2.7.2}$$

Доказательство. Выберем последовательность индексов $\{n_m\}$, для которой

$$\lim_{m\to\infty}y_{n_m}=\varlimsup_{n\to\infty}y_n.$$

Тогда согласно теореме 2.3.1

$$\lim_{m\to\infty}(x_{n_m}\cdot y_{n_m})=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}y_n$$

и, значит, в силу неотрицательности чисел x_n и y_n

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)\geqslant\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}y_n. \tag{2.7.3}$$

Чтобы получить противоположное неравенство, заметим, что для каждого фиксированного $\varepsilon>0$ при всех достаточно больших n

$$x_n<\lim_{n\to\infty}x_n+\varepsilon,\qquad y_n<\varlimsup_{n\to\infty}y_n+\varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$x_n\cdot y_n<\Bigl(\lim_{n\to\infty}x_n+\varepsilon\Bigr)\cdot\Bigl(\varlimsup_{n\to\infty}y_n+\varepsilon\Bigr).$$

Так как выражение в правой части этого неравенства не зависит от n, то из него вытекает, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n \cdot y_n) \leqslant \Big(\lim_{n\to\infty} x_n + \varepsilon\Big) \cdot \Big(\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n + \varepsilon\Big). \tag{2.7.4}$$

Теперь пользуемся тем, что левая часть оценки (2.7.4) не зависит от ε. Поэтому из (2.7.4) следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n \cdot y_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n. \tag{2.7.5}$$

Из неравенств (2.7.3) и (2.7.5) вытекает равенство (2.7.2).

Теорема доказана.

§ 2.8. Критерий Коши

Термин "критерий" обычно употребляют для обозначения необходимых и достаточных условий. Впрочем, такое понимание этого термина не является общепринятым.

Получим критерий существования у последовательности конечного предела.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к числу a. Сравним между собой члены последовательности $\{x_n\}$ с большими индексами.

В силу сходимости последовательности для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon/2$. Поэтому, если $n > N$ и $m > N$, то

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет *условию Коши* (или является *фундаментальной*), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для всех $n > N$ и $m > N$ справедливо неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Таким образом, условие Коши является необходимым для сходимости последовательности к конечному пределу. Покажем, что это условие является также и достаточным.

Теорема 2.8.1 (Критерий Коши). *Для того чтобы последовательность сходилась к конечному пределу, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

Доказательство. Пусть для последовательности $\{x_n\}$ выполняется условие Коши.

Покажем сначала , что последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Для $\varepsilon = 1$ найдем N такое, что для всех $n, m > N$ справедлива оценка $|x_n - x_m| < 1$. Положим $m = N + 1$. Тогда для $n > N$ имеем $|x_n - x_{N+1}| < 1$ и, значит,

$$|x_n| = |x_n - x_{N+1} + x_{N+1}| < 1 + |x_{N+1}|.$$

Поэтому, если $L := \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, 1 + |x_{N+1}|)$, то $|x_n| \leqslant L$ для всех n.

Таким образом, последовательность, удовлетворяющая условию Коши, ограничена.

Согласно теореме Больцано–Вейерштрасса последовательность $\{x_n\}$ в силу ее ограниченности имеет частичный предел. Обозначим его a и докажем, что a является пределом всей последовательности $\{x_n\}$.

Пусть $\{x_{n_k}\}$ — та подпоследовательность, для которой $\lim\limits_k x_{n_k} = a$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем N_1 такое, что для всех $n, m > N_1$ имеем $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$, и N_2 такое, что для всех $n_k > N_2$ имеем $|a - x_{n_k}| < \varepsilon/2$. Оценим для $n > N := \max(N_1, N_2)$ разность $x_n - a$.

Пусть n_k — произвольное число, такое, что $n_k > N$. Тогда для всех $n > N$ имеем

$$|x_n - a| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ сходится.

Теорема доказана.

Отметим, что для выяснения вопроса о сходимости или расходимости последовательности критерием Коши пользоваться удобнее, чем определением сходимости. В самом деле, для проверки выполнения условия Коши нет необходимости заранее знать (или предполагать), чему равен предел рассматриваемой последовательности.

Глава 3
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 3.1. Понятие функции

Пусть D — некоторое множество чисел или (что то же самое) точек на числовой прямой. Если каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие некоторое число y, то говорят, что на D задана функция, часто ее обозначают f и тогда пишут $y = f(x)$. При этом x называют независимой переменной или аргументом, а y — зависимой переменной или функцией. Это подчеркивает, что x можно менять произвольно, а значение y изменяется в зависимости от выбранного x.

Для обозначения функции используют и одну букву f и символ $f(x)$. Таким образом, $f(x)$ может обозначать и функцию f и значение функции f, когда аргумент равен x.

Множество D называют множеством определения или областью определения функции f.

Множество чисел y, которые получаются, когда x пробегает все числа из D, называют множеством (или областью) значений функции f. Обозначим это множество E. Говорят, что множество E является образом множества D при отображении, осуществляемом функцией f.

Само множество E не всегда просто найти, но это и не нужно, когда мы обсуждаем определение функции. Важно только указать, что представляют собой значения функции. В приведенном определении это были числа. Но значениями функции могут быть и другие объекты, например, векторы, матрицы и т.д.

Функция – одно из основных понятий математики. Оно имеет очень общий характер. Не только область значений, но и область определения могут быть не обязательно числовыми. Но сейчас мы будем рассматривать функции в том виде, как они были определены выше, когда и область определения D и область значений E являются числовыми множествами.

Понятие функции вырабатывалось постепенно. Зависимость одних переменных величин от других рассматривали давно. Термин "функция" ввел Лейбниц. Приведенное выше современное определение функции имеется в монографии Эйлера "Дифференциальное исчисление" (1755 г.). Нужно только иметь в виду, что в те годы теоретико-множественная терминология еще не была выработана. Эйлер писал:

"Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер, оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других. Итак, если x обозначает постоянное количество, то все количества, которые как-либо зависят от x, т.е. определяются им, называются его функциями".

Для обозначения функции f, заданной на множестве D, значениями которой являются числа, используется запись

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

В подобном обозначении указываются область определения функции и множество, которому принадлежат значения функции. Такая запись не предполагает, что все числа из $\mathbb{R}$ являются значениями функции.

Иногда функцию, заданную на множестве D, нужно рассматривать на более узком множестве $D_1 \subset D$. Тогда говорят, что функция $f : D_1 \to \mathbb{R}$ является следом функции $f : D \to \mathbb{R}$ на множестве D_1 или сужением функции $f : D \to \mathbb{R}$ на множество D_1.

С понятием функции мы уже встречались, когда давалось определение последовательности. Фактически тогда речь шла о числовой функции, заданной на множестве натуральных чисел, т.е. о функции вида $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

При изучении числовых функций числового аргумента удобно пользоваться их графиками. График функции $f(x) : D \to \mathbb{R}$ – это множество точек на плоскости, которые в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеют координаты $(x, y) = (x, f(x))$. То есть для каждой точки $x \in D$ на прямой, проходящей через эту точку параллельно оси OY, отмечена точка, ордината которой равна $f(x)$. Множество всех таких точек образует график функции $f(x)$.

Возможен и подход, когда график используется для определения функции. В этом случае исходным является множество точек (x, y) на плоскости, такое, что каждое число x встречается в этом множестве не более одного раза (или один раз, если заранее считать, что $x \in D$).

Функции могут быть заданы разными способами. Одним из основных является задание функции формулой. При этом, если область определения функции не указана, считают, что ее область определения составляют все значения аргумента, при которых формула имеет смысл.

§ 3.2. Определение предела функции

Окрестностью точки x называют произвольный интервал (c, d), содержащий эту точку, т.е. должны выполняться условия $c < x < d$. Раньше говорилось об ε-окрестностях, которые теперь можно рассматривать как частный случай окрестностей.

Будут даны два варианта определения предела функции. Затем мы покажем, что эти определения эквивалентны.

Определение предела функции по Коши. Число a называется *пределом функции* f *в точке* x_0, если

1°. функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки;

2°. для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - a| < \varepsilon. \tag{3.2.1}$$

В этом случае пишут

$$a = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

или

$$f(x) \to a, \quad x \to x_0.$$

Вместо "предел функции в точке x_0" говорят также "предел функции при $x \to x_0$".

В определении предела функции не имеет значения, задана функция f в точке x_0 или нет, а если задана, то чему равно $f(x_0)$.

И в условии 1^0. и в условии 2^0. говорится об окрестностях точки x_0, за исключением самой этой точки. В связи с этим вводится понятие "проколотой окрестности точки" — это окрестность, из которой исключена сама эта точка.

Пользуясь этим термином, условие 1^0. можно сформулировать так: функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, а в условии 2^0. можно говорить, что неравенство (3.2.1) выполняется в проколотой δ-окрестности точки x_0.

Определение предела функции по Коши называют также определением на языке ε–δ или на языке окрестностей.

Определение предела функции по Гейне (или на языке последовательностей. Число a называется *пределом функции* f *в точке* x_0, если

1°. функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки;

2°. для каждой последовательности точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$ из области определения функции f, сходящейся к x_0, но не принимающей значение x_0, последовательность $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ сходится к a, т.е.

$$a = \lim_{n \to \infty} f(x_n).$$

Таким образом, в обоих определениях требования на область задания функции одинаковы. Разница состоит в формулировке условий 2°.

Теорема 3.2.1. *Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство. Пусть a — предел функции f в точке x_0 по Коши. Покажем, что a является пределом по Гейне.

Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, все точки x_n которой принадлежат области определения функции f, $x_n \neq x_0$ для всех натуральных n и $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. По заданному $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ такое, что для всех x, для которых $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется условие $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Так как $x_n \to x_0$, то по этому δ можно найти N, зависящее от δ, а в конечном счете зависящее от ε, такое, что $\forall n > N$ выполняется условие $|x_n - x_0| < \delta$. Но тогда для этих n имеем $|f(x_n) - a| < \varepsilon$, т.е. $a = \lim_n f(x_n)$. Таким образом, a является пределом функции f по Гейне.

Пусть теперь, наоборот, a — предел функции f в точке x_0 по Гейне. Будем рассуждать от противного. Предположим, что a не является пределом по Коши.

Это означает, что существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется точка x' такая, что $0 < |x' - x_0| < \delta$ и $|f(x') - a| \geqslant \varepsilon_0$.

Будем в качестве δ брать числа $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого n получим такую точку $x_n \neq x_0$, в которой функция f определена, $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ и $|f(x_n) - a| \geqslant \varepsilon_0$. Построенная последовательность $\{x_n\}$ относится к числу тех, какие рассматриваются в определении предела по Гейне, но для нее $|f(x_n) - a| \geqslant \varepsilon_0$. Это противоречит условию, что a – предел функции f по Гейне.

Теорема доказана.

Эта теорема позволяет говорить о пределе функции в точке, не указывая, в каком смысле понимается этот предел, и каждый раз пользоваться более удобным вариантом определения.

Заметим, что из определения предела функции следует, что если предел функции в точке существует, то он определяется однозначно.

Все, что было сказано о пределе функции, приспособлено к случаю, когда x_0 — число (точка на числовой прямой). Но рассматриваются также пределы функции, когда x стремится к $+\infty$, к $-\infty$ или к ∞.

Познакомимся с некоторыми понятиями, которые покажут, что эти случаи не имеют принципиальных различий.

Наряду с числовой прямой $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ рассматривается расширенная числовая прямая. Здесь возможны два варианта. В одном случае к $(-\infty, +\infty)$ добавляются две "бесконечно удаленные точки" $-\infty$ и $+\infty$. Тогда все элементы расширенной таким образом числовой прямой остаются упорядоченным множеством (для любого числа x имеем $-\infty < x < +\infty$), но арифметические действия определены не для любой пары элементов. Например, имеют смысл выражения $x+(+\infty)$, $(+\infty)+(+\infty)$, но не имеют смысла выражения вида $(+\infty)+(-\infty)$ или $0 \cdot (+\infty)$. Окрестности символа ("точки") $+\infty$ определяются как множества точек x, удовлетворяющих неравенствам $x > L$, где L – произвольное число. А для $-\infty$ окрестности определяются неравенствами $x < L$.

Другой вариант расширенной числовой прямой получим, когда к числовой прямой $(-\infty, +\infty)$ добавляется один символ ∞ (без знака). Здесь упорядоченности нет и арифметрческие действия также определены не для всех случаев. Окрестности символа ("точки") ∞ определяются как множества точек, лежащих вне произвольных отрезков $[L, M]$.

Эти понятия дают представление, как должны выглядеть определения пределов функции при $x \to +\infty$ (или $-\infty$ или ∞). Остановимся подробно на случае $x \to +\infty$. Остальные случаи аналогичны.

Определение. Число a называется *пределом функции f при $x \to +\infty$*, если

1°. функция f определена для всех x, удовлетворяющих условию $x > L$, где L — некоторое число;

2°. (определение по Коши) для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M(\varepsilon)$, что для всех $x > M$ выполняется неравенство

$$|f(x) - a| < \varepsilon;$$

2°. (определение по Гейне) для каждой последовательности $\{x_n\}$, где все x_n принадлежат области определения функции f и $x_n \to +\infty$, справедливо равенство

$$a = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Эквивалентность определений по Коши и по Гейне доказывается аналогично. Заметим, что если в определении предела по Коши вместо записи неравенств, говорить об окрестностях, то никакой разницы между случаями конечного x_0 и бесконечного символа не будет.

Наконец, даются определения, когда пределом является не число a, а бесконечный символ. Например, по определению $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, если (помимо требования на область определения функции f) для любого числа M существует такое $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех $x \neq x_0$, для которых $|x - x_0| < \delta$, имеем $|f(x)| > M$.

Подобным образом можно говорить о случаях, когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (или $-\infty$), а также об определениях, в которых роль x_0 отдана какому-либо бесконечному символу.

Как и для последовательностей, будем говорить, что функция имеет предел, если этот предел конечен. А если предел может быть и бесконечным, то это будет отмечаться.

§ 3.3. Свойства предела функции

Теорема 3.3.1. *Если функция имеет предел при $x \to x_0$, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0.*

Доказательство. Пусть $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Взяв $\varepsilon = 1$, находим $\delta > 0$, при котором для всех $x \neq x_0$ таких, что $|x - x_0| < \delta$, имеем $|f(x) - a| < 1$. Тогда для этих x справедливо неравенство

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - a| + |a| < 1 + |a|$$

и теорема доказана.

Теорема 3.3.2. *Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $a \neq 0$, то существует такая проколотая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство*

$$|f(x)| > \frac{1}{2}\,|a|.$$

При этом $f(x) > a/2$, если $a > 0$, и $f(x) < a/2$, если $a < 0$.

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству соответствующей теоремы для последовательностей.

Полагаем $\varepsilon := |a|/2$ и находим $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется оценка

$$|f(x) - a| < \frac{1}{2}\,|a|.$$

Эта оценка равносильна двойному неравенству

$$a - \frac{1}{2}\,|a| < f(x) < a + \frac{1}{2}\,|a|. \tag{3.3.1}$$

Теперь, если $a > 0$, то пользуемся левым неравенством (3.3.1), а если $a < 0$, то — правым неравенством (3.3.1).

Теорема 3.3.3. *Если для функций f и g существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ и в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Доказательство. Существует такая проколотая окрестность точки x_0, в которой определены обе функции f и g. Возьмем произвольную последовательность точек $\{x_n\}$, принадлежащих этой проколотой окрестности и сходящихся к x_0.

Так как $x_n \to x_0$, то все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера n, попадут в ту окрестность точки x_0, в которой $f(x) \leqslant g(x)$, т.е. $f(x_n) \leqslant g(x_n)$ для всех достаточно больших n. По теореме 2.2.3 о пределах последовательностей отсюда вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} g(x_n),$$

и осталось только заметить, что из определения предела функции по Гейне следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Теорема доказана.

Теорема 3.3.4. *Пусть в некоторой проколотой окрестности точки x_0 для функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ выполняются неравенства*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x). \tag{3.3.2}$$

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ (предполагается существование пределов и их равенство), то предел $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ существует и равен $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Доказательство. Возьмем произвольную сходящуюся к x_0 последовательность $\{x_n\}$ из проколотой окрестности точки x_0, в которой выполняются неравенства (3.3.2). Тогда $f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n)$ и пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$ и $\{h(x_n)\}$ существуют и равны. Значит, по теореме 2.2.4

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Отсюда, пользуясь определением предела функции по Гейне, приходим к утверждению теоремы.

Теорема 3.3.5. *Если существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *то существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|$ *и справедливо равенство*

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \Bigl|\lim_{x\to x_0} f(x)\Bigr|.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. Значит, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, для которых $0 < |x - x_0| < \delta$, имеем $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Но тогда $\bigl||f(x)| - |a|\bigr| \leqslant |f(x) - a| < \varepsilon$ и теорема доказана.

Рассмотрим арифметические действия над функциями, имеющими пределы.

Теорема 3.3.6. *Пусть для функций* f *и* g *существуют пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. *Тогда существуют указанные ниже пределы и выполняются равенства:*

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x);$$

если, кроме того, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, *то*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Доказательство. Заметим, что в утверждении о частном из условия $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ согласно теореме 3.3.2 следует, что в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $g(x) \neq 0$, значит, в этой окрестности имеет смысл частное $f(x)/g(x)$.

Доказательство каждого из утверждений теоремы проводится по следующей схеме. Выбирается произвольная сходящаяся к x_0 последовательность точек $\{x_n\}$ из проколотой окрестности точки x_0, в которой определены функции f и g. Для числовых последовательностей $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ соответствующие свойства известны (когда говорится о частном, учитываем, что $g(x_n) \neq 0$ для достаточно больших n). При этом для любой последовательности $\{x_n\}$ указанного вида в левой части равенств каждого из утверждений теоремы получаем одни и те же значения пределов, так как пределы в правых частях не зависят от того, какая именно последовательность $\{x_n\}$ была взята.

Таким образом, теорема доказана.

§ 3.4. Критерий Коши

Теорема 3.4.1 (Критерий Коши). *Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Для того чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши, т.е. чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что для любых точек x' и x'' из проколотой δ-окрестности точки x_0 имело место неравенство*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{3.4.1}$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. Для каждого $\varepsilon > 0$ находим $\delta > 0$ такое, что для всех x, для которых $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon/2$. Взяв теперь произволные точки x' и x'' из этой проколотой δ-окрестности, видим, что

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - a| + |a - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и необходимость условия Коши доказана.

Пусть теперь выполнено условие Коши. По $\varepsilon > 0$ выбираем такое $\delta > 0$, что для любых точек x' и x'' из проколотой δ-окрестности точки x_0 справедливо неравенство (3.4.1).

Рассмотрим произвольную последовательность точек $\{x_n\}$ из области определения функции f такую, что $x_n \neq x_0$ для всех n и $x_n \to x_0$, $n \to \infty$. В силу сходимости x_n к x_0 существует число N, зависящее от δ, а в конечном счете зависящее от ε, такое, что для всех $n > N$ точки x_n принадлежат той проколотой δ-окрестности точки x_0, где выполняется неравенство (3.4.1).

Тогда для $n, m > N$ имеем $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Это показывает, что выполнено условие Коши для последовательности $\{f(x_n)\}$. Таким образом, для любой последовательности $\{x_n\}$ рассматриваемого вида существует конечный предел последовательности $\{f(x_n)\}$.

Нужно еще показать, что для разных последовательностей $\{x_n\}$ пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$ одинаковы.

Рассмотрим две последовательности указанного вида $\{x_n\}$ и $\{t_n\}$. Пусть $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ и $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = b$. Составим новую последовательность

$$x_1,\, t_1,\, x_2,\, t_2,\, x_3,\, t_3,\, \ldots, \tag{3.4.2}$$

включая в нее попеременно члены последовательностей $\{x_n\}$ и $\{t_n\}$.

Все члены последовательности (3.4.2) принадлежат области определения функции f, отличны от x_0 и последовательность (3.4.2) сходится к x_0. Значит, по уже доказанному последовательность значений функции f в точках этой последовательности имеет предел. Числа a и b являются частичными пределами этой сходящейся последовательности. Отсюда следует, что $a = b$.

Теорема доказана.

§ 3.5. Предел сложной функции

Сначала объясним термин “сложная функция”.

Определение. Пусть на множестве D задана функция $f(x)$ и E — множество значений функции f. Предположим, что на E определена функция φ. Тогда для всех $x \in D$ имеет смысл выражение

$$\psi(x) := \varphi(f(x)).$$

Заданная таким образом на D функция ψ называется *сложной функцией.*

Сложную функцию называют также функцией от функции, суперпозицией функций или композицией функций.

Рассмотрим вопрос, при каких условиях из существования пределов функций f и φ следует, что имеет предел сложная функция ψ.

Теорема 3.5.1. *Пусть* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, *причем в некоторой проколотой окрестности точки* x_0

$$f(x) \neq y_0. \tag{3.5.1}$$

Пусть, далее, $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = z_0$. *Тогда существует предел*

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = z_0.$$

Доказательство. Заметим, что в доказательстве нуждается и тот факт, что сложная функция $\varphi(f(x))$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Это будет установлено по ходу рассуждений.

Так как предел функции φ в точке y_0 равен z_0, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует число $\sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех y, удовлетворяющих условию $0 < |y - y_0| < \sigma$, справедлива оценка $|\varphi(y) - z_0| < \varepsilon$.

Теперь по σ находим $\delta > 0$ такое, что для всех x, для которых $0 < |x - x_0| < \delta$, имеем $|f(x) - y_0| < \sigma$. Уменьшив в случае необходимости значение δ, можно добиться того, что в проколотой δ-окрестности точки x_0 выполняется условие (3.5.1). Тогда все значения функции f для x из этой δ-окрестности принадлежат проколотой σ-окрестности точки y_0. Значит, для этих x

$$|\varphi(f(x)) - z_0| < \varepsilon.$$

Отсюда следует утверждение теоремы, поскольку δ выбиралось в зависимости от σ, а σ в зависимости от ε, т.е. в конце концов выбор δ зависит от ε.

Условие (3.5.1) существенно для справедливости теоремы 3.5.1. В самом деле, из существования предела $\lim_{y\to y_0} \varphi(y)$ не следует, что функция $\varphi(y)$ определена в точке y_0, а если и определена, то никаких условий на ее значение в этой точке не накладывается.

Поэтому, если условие (3.5.1) не выполнено, то в как угодно малой окрестности точки x_0 могут оказаться точки x, для которых выражение $\varphi(f(x))$ или не определено или принимает значения, никак не связанные со значениями φ в проколотой окрестности точки y_0.

Вместе с тем, из доказательства теоремы 3.5.1 видно, что от условия (3.5.1) можно отказаться, если потребовать, что функция φ определена при $y = y_0$ и $\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0)$.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.5.2. *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ *и* $\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0)$. *Тогда*

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(f(x)) = \varphi(y_0).$$

§ 3.6. Односторонние пределы

Наряду с окрестностями точек, когда точка лежит внутри соответствующего интервала, рассматриваются промежутки, которые называют односторонними окрестностями точек. Любой полуотрезок вида $(a, x_0]$ называют левой окрестностью точки x_0, а полуотрезок вида $[x_0, b)$ — правой окрестностью точки x_0.

В терминах левых и правых окрестностей вводятся односторонние пределы. Приведем определение предела функции в точке справа.

Определение. Пусть функция f задана в некоторой правой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Число a называется *пределом функции f в точке x_0 справа*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta$, справедлива оценка

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут

$$a = \lim_{x \to x_0,\, x > x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

или $a = f(x_0 + 0)$.

Это — определение предела по Коши. Можно дать определение односторонних пределов по Гейне и доказать их эквивалентность. Не будем на этом останавливаться ввиду очевидности тех изменений, которые нужно сделать по сравнению со случаем обычных пределов.

Соответствующим образом формулируется определение предела функции слева. Этот предел обозначают $f(x_0 - 0)$. Правый и левый пределы в точке 0 обозначают $f(+0)$ и $f(-0)$.

Понятно, что существование предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ равносильно существованию и равенству односторонних пределов $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$.

Теорема 3.6.1. *Пусть функция f возрастает на интервале (a, b), т.е. $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ для $x_1 < x_2$. Тогда если значения f на (a, b) ограничены сверху числом B, то предел $f(b - 0)$ существует и $f(b - 0) \leqslant B$. Если функция f не является ограниченной сверху на (a, b), то $f(b - 0) = +\infty$.*

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству соответствующей теоремы для последовательностей. Если $f(x) \leqslant B$ для $x \in (a, b)$, то существует $M := \sup\limits_{x \in (a,b)} f(x)$ и $M \leqslant B$. Так как M — точная верхняя грань, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется точка $x_\varepsilon \in (a, b)$, для которой $f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$. Но тогда в силу возрастания f для всех $x \in (x_\varepsilon, b)$ имеем

$$M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant M.$$

А это показывает, что $f(b - 0) = M$.

Если f не является ограниченной сверху, то для каждого числа L существует точка $x_L \in (a, b)$ такая, что $f(x_L) > L$. А в силу возрастания f для всех $x \in (x_L, b)$ имеем $f(x) \geqslant f(x_L) > L$. Значит, $f(b - 0) = +\infty$.

Теорема доказана.

Аналогичное утверждение справедливо и для убывающих функций.

Теорема 3.6.2. *Если функция f монотонна (т.е. возрастает или убывает) на (a, b), то для каждого $x \in (a, b)$ существуют пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$. При этом, если f возрастает, то $f(x-0) \leqslant f(x+0)$, а если f убывает, то $f(x-0) \geqslant f(x+0)$.*

Доказательство. Пусть f на (a, b) возрастает. Для каждой точки x_0 рассмотрим след f на интервале (a, x_0).

Так как все значения функции f на (a, x_0) ограничены сверху числом $f(x_0)$, то согласно теореме 3.6.1 существует предел $f(x_0 - 0)$ и справедливо неравенство $f(x_0-0) \leqslant f(x_0)$. Точно так же из возрастания f на интервале (x_0, b) следует существование предела $f(x_0+0)$ и неравенство $f(x_0) \leqslant f(x_0+0)$. Это доказывает теорему для возрастающих функций.

Для убывающих функций рассуждения аналогичны.

§ 3.7. Сравнение функций

Пусть на множестве D заданы функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. Если существует такое число C, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant C|\varphi(x)|,$$

то пишут

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad \text{на} \quad D$$

и говорят, что f есть O-большое от φ на D.

Пусть теперь функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданы в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Если существуют число C и такая проколотая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности

$$|f(x)| \leqslant C|\varphi(x)|,$$

то пишут

$$f(x) = O(\varphi(x)), \quad x \to x_0, \tag{3.7.1}$$

и говорят, что f есть O-большое от φ при $x \to x_0$. Хотя в этой формуле использована запись $x \to x_0$, но никакого предельного перехода здесь нет. Это означает только, что речь идет о достаточно малой окрестности точки x_0.

Если на D или при $x \to x_0$ одновременно имеют место соотношения $f(x) = O(\varphi(x))$ и $\varphi(x) = O(f(x))$, то говорят, что функции

$f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют одинаковый порядок, соответственно, на D или при $x \to x_0$.

Обозначать это будем так:

$$f(x) \sim \varphi(x), \tag{3.7.2}$$

добавляя, что это соотношение имеет место на D или при $x \to x_0$.

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не обращаются в нуль (соответственно, на D или в некоторой проколотой окрестности точки x_0), то определение одинакового порядка этих функций можно сформулировать так: существуют положительные числа C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \leqslant \left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| \leqslant C_2$$

на D или в достаточно малой проколотой окрестности точки x_0.

Рассмотрим функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, заданные в некоторой проколотой окрестности точки x_0, для которых

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

В этом случае пишут

$$f(x) = o(\varphi(x)), \quad x \to x_0, \tag{3.7.3}$$

и говорят, что функция $f(x)$ есть o-малое от $\varphi(x)$ при $x \to x_0$.

Если $f(x) = o(1)$, $x \to x_0$, то функцию f называют бесконечно малой (исчезающей) при $x \to x_0$.

Ясно, что если $f(x) = o(\varphi(x))$, $x \to x_0$, то $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \to x_0$, а обратное утверждение не верно.

Понятно также, что если $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \to x_0$, и $\varphi(x) = O(\psi(x))$, $x \to x_0$, то $f(x) = O(\psi(x))$, $x \to x_0$, причем если хотя бы в одном из исходных соотношений заменить O на o, то получим $f(x) = o(\psi(x))$, $x \to x_0$.

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ таковы, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1,$$

то говорят, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to x_0$ асимптотически равны или эквивалентны. В таком случае будем писать

$$f(x) \approx \varphi(x), \quad x \to x_0. \tag{3.7.4}$$

К сожалению, нет установившихся общеприняых обозначений для порядкового и асимптотического равенств и наряду с (3.7.2) и (3.7.4) используются и другие варианты записи.

Отметим, что определения символов O, o, $\sim$, $\approx$ можно относить не ко всей окрестности точки x_0, а к односторонним окрестностям.

Подчеркнем, что хотя в формулах (3.7.1) и (3.7.3) употребляется знак равенства, в обоих этих случаях мы имеем дело не с равенствами, а с оценками, сравнивающими поведение функции $f(x)$ с поведением функции $\varphi(x)$ при $x \to x_0$.

Глава 4
НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 4.1. Непрерывность функции в точке

Определение. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

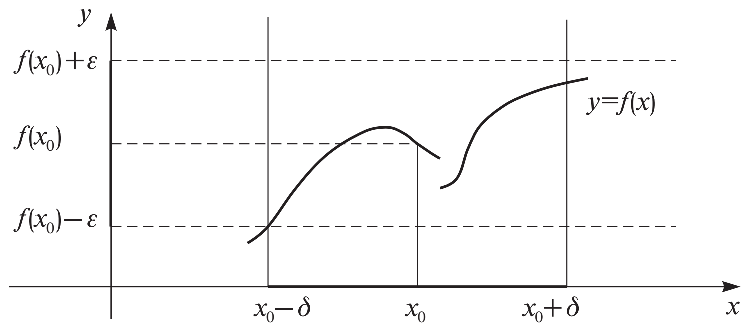
Используя предел функции в точке, можно дать эквивалентную формулировку: функция f непрерывна в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Графически непрерывность f в точке x_0 означает, что по $\varepsilon > 0$ строится полоса, параллельная оси OX, заключенная между прямыми $y = f(x_0) + \varepsilon$ и $y = f(x_0) - \varepsilon$, и требуется, чтобы существовала такая δ-окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности точки графика функции $f(x)$ попадали в указанную полосу.

Можно дать определение и в терминах последовательностей: функция f непрерывна в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и для любой последовательности точек $\{x_n\}$ из области определения f такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, справеливо равенство $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$. Это можно записать так:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n).$$



При обсуждении вопросов, связанных с непрерывностью функций, удобно пользоваться понятием приращения функции. Дадим аргументу x_0 функции $y = f(x)$ приращение Δx так, чтобы число $x_0+\Delta x$ также принадлежало области определения функции. Приращение Δx может быть как положительным, так и отрицательным. Разность значений функции

$$\Delta y := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

называется приращением функции f в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx.

Непрерывность функции f в точке x_0 эквивалентна тому, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Перечислим свойства непрерывных функций, которые вытекают из свойств предела функции в точке.

Если функция непрерывна в точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует такая окрестность точки x_0, что $|f(x)| > |f(x_0)|/2$ для всех x из этой окрестности. При этом $f(x) > f(x_0)/2$, если $f(x_0) > 0$, и $f(x) < f(x_0)/2$, если $f(x_0) < 0$.

Отсюда следует, что *если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то f сохраняет знак в некоторой окрестности точки x_0*.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке непрерывны функции $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, а если, кроме того, $g(x_0) \neq 0$, то непрерывна и функция $f(x)/g(x)$.

Непрерывность функций, полученных при арифметических действиях над непрерывными функциями, позволяет сделать вывод о непрерывности многочленов. В самом деле, непрерывность функций $f(x) = C$ (эта функция принимает значение C для всех значений аргумента) и $f(x) = x$ очевидна. Значит, для каждого натурального

n функция $f(x) = x^n$ является непрерывной, в чем легко убедиться, рассуждая по индукции. А отсюда следует непрерывность любого многочлена $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$. Рациональные дроби, т.е. отношения двух многочленов, непрерывны во всех точках, в которых знаменатель не обращается в нуль.

Наконец, теорема 3.5.2 показывает, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $\varphi(y)$ непрерывна в точке $y_0 := f(x_0)$, то сложная функция $\varphi(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Наряду с непрерывностью функции в точке рассматривают одностороннюю непрерывность.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной справа в точке* x_0, если $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной слева в точке* x_0, если $f(x_0 - 0) = f(x_0)$.

Непрерывности функции f в точке равносильна непрерывности f в этой точке и справа и слева.

Понятно, как приведенные выше свойства функций, непрерывных в точке, переносятся на функции, непрерывные справа или слева.

§ 4.2. Классификация точек разрыва

Рассмотрим, какими могут быть точки, в которых функция не является непрерывной. Такие точки называют точками разрыва функции.

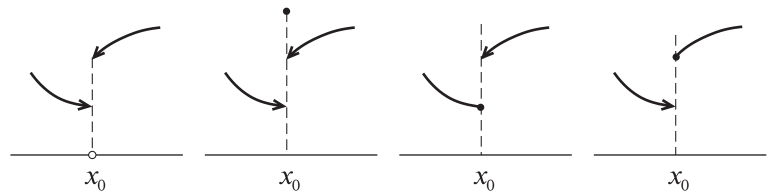
Будем считать, что функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, чтобы можно было говорить о пределе f в точке x_0. Это условие в дальнейшем отмечать не будем.

Если функция f имеет разрыв в точке x_0 и существуют конечные пределы $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$, то говорят, что это разрыв первого рода.

Если функция f имеет в точке x_0 разрыв первого рода и $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, то либо f не определена в этой точке, либо f определена в точке x_0, но $f(x_0) \neq f(x_0 + 0)$. Положиив $f(x_0) := f(x_0 + 0)$, т.е. доопределив или переопределив f в точке x_0, получим непрерывную функцию. Таким образом, мы "устранили" разрыв. Такие разрывы называют устранимыми.

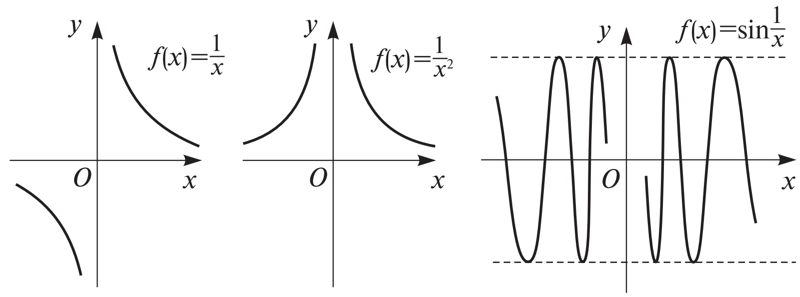
Разрыв первого рода называют неустранимым, если $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$. В этом случае доопределением или переопределением функции в точке x_0 нельзя получить непрерывную функцию.

На рисунке изображены неустранимые разрывы первого рода.



Пусть функция f задана в односторонней окрестности точки x_0, для определенности — в правой окрестности. Если существует предел $f(x_0+0)$ и $f(x_0+0) \neq f(x_0)$, то x_0 также называют точкой разрыва первого рода.

Если разрыв функции не является разрывом первого рода, то его называют разрывом второго рода. На рисунке изображены некоторые характерные примеры разрывов второго рода.



Согласно теореие 3.6.2, если функция $f(x)$ монотонна на некотором промежутке, то в каждой внутренней точке x_0 этого промежутка существуют пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$. Соответствующий односторонний предел существует и в концевых точках промежутка монотонности, если эти точки ему принадлежат.

Значит, все точки разрыва монотонной функции являются точками разрыва первого рода.

Заметим, что если множество точек разрыва монотонной функции бесконечно, то оно обязательно счетно. В самом деле, поставим каждой точке разрыва x_0 какое-либо рациональное число, заключенное между $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$. Получим взаимно однозначное соответствие множества точек разрыва и некоторого подмножества множества рациональных чисел, а каждое такое бесконечное множество счетно.

Итак, монотонная функция может иметь точки разрыва только первого рода и множество точек разрыва не более чем счетно.

§ 4.3. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках отрезка, т.е. во всех точках интервала (a, b), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций обозначают $C[a, b]$ и тот факт, что f непрерывна на $[a, b]$, записывают так: $f \in C[a, b]$.

Наряду с непрерывностью на отрезке рассматривают непрерывность на интервале, на полуотрезке, полуоси и всей оси. Множество функций, непрерывных на интервале (a, b), обозначают $C(a, b)$.

Когда ясно, о непрерывности на каком промежутке идет речь, пишут $f \in C$.

Понятно, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке непрерывны функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, а если $g(x) \neq 0$ для всех $x \in [a, b]$, то непрерывна и функция $f(x)/g(x)$.

Теорема 4.3.1. *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Ограниченность функции f на отрезке $[a, b]$ означает существование такого числа L, что $|f(x)| \leqslant L$ для всех $x \in [a, b]$.

Докажем теорему от противного. Предположим, что функция $f \in C[a, b]$ и не является ограниченной на $[a, b]$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in [a, b]$, для которой $|f(x_n)| > n$. Таким образом, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Последовательность точек $\{x_n\}$ ограничена, так как все эти точки принадлежат отрезку $[a, b]$. Значит, по теореме Больцано–Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $t := \lim_k x_{n_k}$. Тогда $t \in [a, b]$.

В силу непрерывности функции f в точке t (если точка t оказалась одним из концов отрезка, то имеется в виду односторонняя непрерывность) для любой сходящейся к этой точке последовательности точек $\{z_k\}$ из $[a, b]$ имеем $\lim\limits_k f(z_k) = f(t)$. Значит, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(t)$. Но так как $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$, то должно выполняться равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$. Мы пришли к противоречию, которое заканчивает доказательство теоремы.

Отметим, что для функций, непрерывных на интервале, утверждение, аналогичное теореме 4.3.1, не верно. В этом можно убедиться на примере функции $f(x) := 1/x$. Эта функция непрерывна, но не ограничена на $(0,1)$.

Теорема 4.3.2 (Теорема Вейерштрасса). *Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то в некоторых точках этого отрезка она достигает точную верхнюю и точную нижнюю грани своих значений на $[a,b]$.*

Доказательство. Докажем утверждение о точной верхней грани. Точная верхняя грань значений функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, существует, так как согласно теореме 4.3.1 функция ограничена.

Пусть $M := \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Для каждого натурального n найдем точку $x_n \in [a,b]$ такую, что $f(x_n) > M - 1/n$. Но $f(x_n) \leqslant M$ для всех n, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M. \tag{4.3.1}$$

Пользуясь теоремой Больцано–Вейерштрасса, находим сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$. Пусть $t := \lim\limits_k x_{n_k}$, тогда $t \in [a,b]$.

Так как f непрерывна в точке t, то $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(t)$. С другой стороны, согласно (4.3.1) $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$, значит, $M = f(t)$.

Для точной нижней грани доказательство аналогично.

Таким образом, можно говорить о максимальном значении функции, непрерывной на отрезке, и писать в этом случае не $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, а $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Для функций, непрерывных на интервале, теорема 4.3.2 не имеет места, даже если дополнительно предполагать ограниченность функции.

Теорема 4.3.3 (Теорема Коши о промежуточных значениях). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a) \neq f(b)$. Тогда для любого числа d, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $t \in [a,b]$ такая, что $d = f(t)$.*

Доказательство. Докажем сначала частный случай этого утверждения, когда числа $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки и $d = 0$.

Разделим отрезок $[a,b]$ пополам. Если в точке деления значение функции равно нулю, то в качестве t можно взять точку деления.

А если в точке деления значение функции f отлично от нуля, то в концах одного из полученных отрезков значения $f(x)$ имеют разные знаки. Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$. Заметим, что $b_1 - a_1 = (b-a)/2$.

Делим теперь отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и повторяем предыдущее рассуждение. Т.е., если в точке деления функция обращается в нуль, то нужная точка уже найдена. В противном случае выберем тот из получившихся отрезков, в концах которого функция принимает значения разных знаков. Обозначим этот отрезок $[a_2, b_2]$ и заметим, что его длина в два раза меньше длины отрезка $[a_1, b_1]$.

Продолжим этот процесс. Если мы не встретим нуль функции на каком-то шаге, то получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, длины которых $b_n - a_n = (b-a)/2^n$ стремятся к нулю. Значит, согласно теореме 1.7.1 существует точка t, принадлежащая всем этим отрезкам. Покажем, что $f(t) = 0$.

Если это не так, то функция f сохраняет знак в некоторой окрестности точки t. Для достаточно больших n отрезки $[a_n, b_n]$ целиком содержатся в этой окрестности, так как она содержит точку t и длины отрезков стремятся к нулю. Поскольку в концах отрезков $[a_n, b_n]$ функция f принимает значения разных знаков, мы пришли к противоречию с тем, что функция сохраняет знак в указанной окрестности точки t.

Переходим к общему случаю в теореме Коши. Введем функцию $g(x) := f(x) - d$. Функция g непрерывна и в концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разных знаков. Значит, по уже доказанному существует точка $t \in [a, b]$, в которой $g(t) = 0$. Отсюда $f(t) - d = 0$ и $f(t) = d$.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 4.3.4. *Пусть $[a, b]$ — промежуток, т.е. отрезок, интервал или полуотрезок. Пусть, далее, функция f непрерывна на этом промежутке и*

$$M := \sup_{x \in [a,b]} f(x),$$

если значения f на $[a, b]$ ограничены сверху, и $M := +\infty$ в противном случае. Аналогично полагаем

$$m := \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

или $m := -\infty$.

Тогда для любого числа $d \in (m, M)$ существвет точка $t \in [a, b]$ такая, что $d = f(t)$.

Доказательство. Так как $m < d < M$, то, пользуясь определением точных граней, видим, что существуют такие числа m' и M', что

$m < m' < d < M' < M$ и числа m' и M' являются значениями функции f, т.е. $m' = f(x_1)$ и $M' = f(x_2)$ для некоторых точек x_1 и x_2 из промежутка $[a, b]$.

Рассмотрим след функции f на отрезке с концами в точках x_1 и x_2. Так как f непрерывна на этом отзезке, а в концах его имеет значения m' и M', то в силу теоремы Коши 4.3.3 функция f принимает значение d в некоторой точке, что и требовалось доказать.

Если в следствии 4.3.4 промежуток $[a, b]$ является отрезком, то согласно теореме Вейерштрасса 4.3.2 числа m и M также являются значениями функции f. Значит, в этом случае значения f целиком заполняют отрезок $[m, M]$, т.е. отрезок $[m, M]$ является образом отрезка $[a, b]$ при отображении, осуществляемом функцией $f(x)$.

§ 4.4. Равномерная непрерывность функций

Если функция f непрерывна на промежутке $[a, b]$, то для любой точки $x_0 \in [a, b]$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ такое, что $\forall x$ из области определения функции f, для которых $|x - x_0| < \delta$, имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Подчеркнем, что δ зависит не только от ε, но и от x_0 и, переходя от одной точки к другой, при одном и том же ε будем получать разные δ. А в том случае, когда δ можно выбрать зависящим только от ε, говорят о равномерной непрерывности функции.

Определение. Функция, заданная на промежутке $[a, b]$, называется *равномерно непрерывной* на этом промежутке, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любых точек x' и x'' из $[a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, выполняется оценка

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Промежуток, о котором здесь говорится, не обязательно является отрезком. Он может быть интервалом или полуотрезком, в том числе и бесконечным.

Теорема 4.4.1 (Теорема Кантора). *Если функция непрерывна на отрезке, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. Предположим противное: пусть функция $f(x)$ непрерывна, но не является равномерно непрерывной на отрезке $[a, b]$. Это означает, что $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ найдутся точки x' и x'' из $[a, b]$, для которых $|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon_0$.

Выбирая в качестве δ числа вида $1/n, n \in \mathbb{N}$, для каждого n находим пару точек x'_n и x''_n из $[a, b]$ такую, что $|x'_n - x''_n| < 1/n$ и $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

Рассмотрим последовательность $\{x'_n\}$. Она ограничена, значит, содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$. Пусть $x_0 := \lim_k x'_{n_k}$, тогда $x_0 \in [a,b]$. Из неравенства

$$|x''_{n_k} - x_0| \leqslant |x''_{n_k} - x'_{n_k}| + |x'_{n_k} - x_0|$$

следует, что и $\lim\limits_k x''_{n_k} = x_0$.

Так как f непрерывна в точке x_0, то $\lim_k f(x'_{n_k}) = f(x_0)$ и $\lim_k f(x''_{n_k}) = f(x_0)$, а это вступает в противоречие с неравенством $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0$.

Теорема доказана.

Для функций, непрерывных на интервале, подобная теорема не имеет места.

Свойство равномерной непрерывности функции удобно выражать в терминах ее модуля непрерывности.

Определение. Пусть функция f определена на некотором промежутке. *Модулем непрерывности* функции f называется функция

$$\omega(f,\delta) := \sup |f(x') - f(x'')|, \quad \delta \geqslant 0,$$

где верхняя грань берется по всем точкам x' и x'' из указанного промежутка таким, что $|x' - x''| \leqslant \delta$.

Модуль непрерывности $\omega(f,\delta)$ определяют для δ, не превосходящих длины промежутка, на котором рассматривается функция f.

В обозначении $\omega(f,\delta)$ символ f опускают, если ясно, о модуле непрерывности какой функции идет речь.

Легко видеть, что модуль непрерывности обладает следующими свойствами:

1°. $\omega(\delta) \geqslant 0$ и $\omega(0) = 0$;

2°. $\omega(\delta)$ убывает при убывании δ.

Отсюда, в частности, следует, что предел $\omega(+0)$ существует и выполняется неравенство $\omega(+0) \geqslant 0$.

Теорема 4.4.2. *Если функция $\omega(\delta)$ является модулем непрерывности некоторой функции f, то для любых положительных чисел δ_1 и δ_2 справедлива оценка*

$$\omega(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2). \tag{4.4.1}$$

В частности, $\omega(2\delta) \leqslant 2\omega(\delta)$.

Доказательство. Пусть x' и x'' — произвольные точки из области определения функции f такие, что $|x'-x''| \leqslant \delta_1+\delta_2$. Возьмем между x' и x'' точку z, для которой $|x' - z| \leqslant \delta_1$ и $|z - x''| \leqslant \delta_2$. Тогда

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(z)| + |f(z) - f(x'')| \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2).$$

В полученном неравенстве правая часть не зависит от точек x' и x''. Поэтому выражение в левой части можно заменить на верхнюю грань его значений, взятую по всем рассматриваемым x' и x'', а это дает оценку (4.4.1).

Теорема доказана.

Свойство, выраженное неравенством (4.4.1), называют полуаддитивностью функции $\omega(\delta)$.

Теорема 4.4.3. *Условие $\omega(f,+0)=0$ необходимо и достаточно для равномерной непрерывности функции f.*

Доказательство. Если $\omega(f,+0)=0$, то для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\omega(f,\delta)<\varepsilon$.

Значит, для любых точек x', x'' из области определения функции f, для которых $|x'-x''|<\delta$, имеем $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. А это означает равномерную непрерывность функции f, т.е. достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть функция f равномерго непрерывна. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любых точек x', x'' из области определения f, для которых $|x'-x''|<\delta$, имеем

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2.$$

Так как выражение в правой части этого неравенства не зависит от x' и x'', выражение из левой части можно заменить на верхнюю грань по всем x' и x'', для которых $|x'-x''|<\delta$. Тогда получим $\omega(\delta)\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon$, что приводит к равенству $\omega(f,+0)=0$.

Теорема доказана.

§ 4.5. Непрерывность обратной функции

Пусть на D задана функция f и E – множество ее значений, т.е. это множество тех чисел $y=f(x)$, которые получаются, когда x пробегает все множество D. Говорят, что E — образ множества D при отображении, осуществляемом функцией f.

Восстановить x по значению $y\in E$ не всегда можно, так как для одного $y\in E$ может быть много точек $x\in D$ таких, что $y=f(x)$.

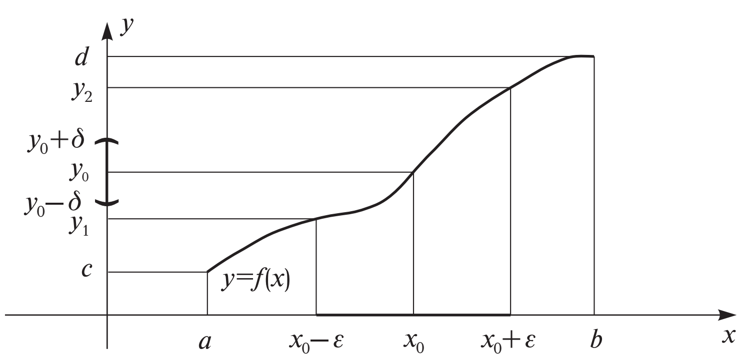
Если функция f осуществляет взаимно однозначное отображение множества D на E, то на E можно задать функцию, поставив в соответствие каждому $y\in E$ то число $x\in D$, для которого $y=f(x)$. В силу взаимной однозначности такое число x только одно. Эту функцию $x=\varphi(y)$ называют функцией, обратной к f. Обратную функцию часто обозначают $x=f^{-1}(y)$.

Если функция f строго монотонна на D, т.е. f строго возрастает или строго убывает, то отображение $f : D \to E$ обратимо. В этом случае обратная функция также строго монотонна, причем она является строго возрастающей, если функция f возрастала, и является строго убывающей, если функция f убывала.

Теорема 4.5.1. *Пусть функция f на отрезке $[a, b]$ строго возрастает и непрерывна, $c := f(a)$ и $d := f(b)$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ строго возрастает и непрерывна на отрезке $[c, d]$.*

Доказательство. О строгом возрастании обратной функции уже говорилось. Кроме того, множество значений функции $f(x)$ в силу ее непрерывности целиком заполняет отрезок $[c, d]$. Новым является утверждение о непрерывности функции $f^{-1}(y)$ на отрезке $[c, d]$.

Рассмотрим произвольную точку $y_0 \in (c, d)$ и найдем точку $x_0 \in (a, b)$, для которой $f(x_0) = y_0$. Возьмем положительное число ε такое, что ε-окрестность точки x_0 принадлежит интервалу (a, b). Тогда точки $y_1 := f(x_0 - \varepsilon)$ и $y_2 := f(x_0 + \varepsilon)$ попадают в интервал (c, d).



В силу строгого возрастания функции $f(x)$ она устанавливает взаимно однозначное соответствие отрезка $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ на оси OX и отрезка $[y_1, y_2]$ на оси OY.

Возьмем положительное число δ такое, что δ-окрестность точки y_0 принадлежит (y_1, y_2). Тогда вся δ-окрестность точки y_0 при отображении, осуществляемом функцией $f^{-1}(y)$, попадает в ε-окрестность точки x_0. А это и означает непрерывность функции f^{-1} в точке y_0.

При доказательстве непрерывности f^{-1} в концевых точках c и d рассуждения аналогичны, нужно только брать соответствующие односторонние окрестности.

Теорема доказана.

Приведем вариант теоремы о непрерывности обратой функции, когда исходная функция задана не на отрезке, а на интервале.

Теорема 4.5.2. *Пусть функция f строго возрастает и непрерывна на интервале (a, b). Обозначим $c := \inf\limits_{x \in (a,b)} f(x)$ и $d := \sup\limits_{x \in (a,b)} f(x)$. Тогда образом интервала (a, b) при отображении $y = f(x)$ является интервал (c, d) и функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна на (c, d).*

Доказательство. Здесь интервал (a, b) может быть как конечным, так и бесконечным. Если функция f не является ограниченной сверху на (a, b), то под точной верхней гранью значений $f(x)$ понимаем $+\infty$. Аналогично полагаем $c = -\infty$, если f не является ограниченной снизу. Таким образом, интервал (c, d) также может быть бесконечным.

Если $d < +\infty$, то никакое число $y \geqslant d$ не может быть значением функции $f(x)$. Для $y > d$ это следует из определения точной верхней грани. А если бы число d было значением функции f при некотором $x_0 \in (a, b)$, то для $x > x_0$ в силу строгого возрастания f мы получили бы значения, превышающие d. Аналогичное утверждение справедливо и для левого конца интервала (c, d). Таким образом, для всех $x \in (a, b)$ имеем $f(x) \in (c, d)$.

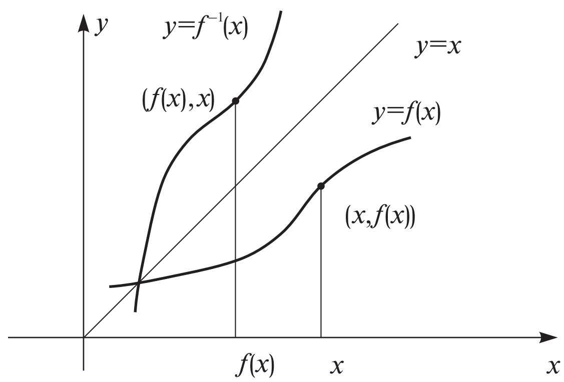
Любое число $y_0 \in (c, d)$ является значением функции f в некоторой точке из (a, b). В самом деле, согласно определению величин c и d в (a, b) существуют числа x_1 и x_2 такие, что $f(x_1) < y_0 < f(x_2)$. При этом $x_1 < x_2$ в силу строгого возрастания f.

Рассмотрим след функции f на отрезке $[x_1, x_2]$. Так как f строго возрастает на $[x_1, x_2]$, то значения функции f целиком заполняют отрезок $[f(x_1), f(x_2)]$, т.е. точка y_0 является одним из значений функции и, кроме того, согласно теореме 4.5.1 обратная функция $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке y_0.

Теорема доказана.

Понятно, как должны выглядеть аналоги теорем 4.5.1 и 4.5.2 для строго убывающих функций.

Рассмотрим вопрос о графике обратной функции. Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна. Будем обозначать аргумент обратной функции f^{-1} через x, как мы обычно обозначаем независимую переменную, а зависимую переменную будем обозначать y. Тогда график функции $y = f^{-1}(x)$ можно получить с помощью зеркального отражения графика функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$. Дело в том, что точки, принадлежащие графику функции $y = f(x)$ имеют координаты $(x, f(x))$, а координаты точек, полученных при их зеркальном отражении, равны $(f(x), x)$.



§ 4.6. Показательная функция

Начнем с определения степени a^x при иррациональных значениях показателя x.

Будем считать, что число a удовлетворяет естественным условиям $a > 0$ и $a \neq 1$, не отмечая это.

Рассмотрим сначала степень a^x для рациональных значений показателя x. При этом многое будет повторять рассуждения, проводившиеся в школьном курсе.

По определению степенной функции $a^1 := a$ и при натуральных $n \geqslant 2$

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n}.$$

Пусть теперь число x имеет вид $1/n$, где $n \in \mathbb{N}$.

При фиксированном натуральном n рассмотрим функцию $u = v^n$, $v \in [0, \infty)$. Эта функция строго возрастает и непрерывна, область ее значений $[0, \infty)$. Значит, согласно теоремам предыдущего параграфа обратная функция $v = \sqrt[n]{u} = u^{1/n}$ определена на полуоси $[0, \infty)$ и непрерывна на ней.

В школьном курсе существование арифметического корня n-ой степени из положительного числа считалось само собой разумеющимся. Теперь этот факт получил обоснование.

Итак, степень a^x определена для чисел x вида $1/n$. Если $x = p/q$, где p и q – натуральные числа, то по определению полагают

$$a^{p/q} := (a^p)^{1/q}.$$

Здесь можно было бы брать и $(a^{1/q})^p$, но равенство $(a^p)^{1/q} = (a^{1/q})^p$ нуждается в доказательстве.

Если $x = 0$, то $a^0 := 1$, а если $x = -p/q$, где p и q — натуральные числа, то по определению $a^{-p/q} := 1/a^{p/q}$.

Таким образом, степень a^x определена для всех рациональных x. При этом выполняются следующие свойства (буквы r обозначают произвольные рациональные числа):

$$a^r > 0;$$
$$a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2};$$
$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1\, r_2};$$
$$(ab)^r = a^r\, b^r, \quad a > 0,\, b > 0;$$

если $a > 1$, то a^r строго возрастает на множестве рациональных чисел (в частности, если $a > 1$ и $r > 0$, то $a^r > 1$) и $\lim\limits_{r\to+\infty} a^r = +\infty$, $\lim\limits_{r\to-\infty} a^r = 0$;

если $a < 1$, то a^r строго убывает на множестве рациональных чисел.

Мы не приводим обоснование этих свойств, так как оно аккуратно проведено в школьном курсе, где не было доказано только существование арифметического корня n-ой степени.

В дальнейшим понадобится следующее утверждение о степенях с рациональными показателями.

Лемма 4.6.1 (Неравенство Бернулли). *Если $a > 1$ и $h \in (0,1]$ — рациональное число, то*

$$0 < a^h - 1 \leqslant 2(a-1)h. \tag{4.6.1}$$

Доказательство. Пусть сначала $h = 1/n$, где n — натуральное число. Тогда $a^{1/n} = 1 + \lambda$, где в силу строгого возрастания a^x на множестве рациональных чисел $\lambda > 0$. Поэтому из неравенства Бернулли (2.6.1) вытекает, что

$$a = (1+\lambda)^n \geqslant 1 + \lambda n.$$

Значит,

$$\lambda = a^h - 1 \leqslant \frac{a-1}{n} = (a-1)h,$$

т.е.

$$0 < a^h - 1 \leqslant (a-1)h$$

и мы получили неравенство (4.6.1) для рассматриваемых значений h даже без множителя 2 в правой части.

Пусть теперь h — произвольное рациональное число из $(0,1)$. Находим натуральное n такое, что $1/(n+1) < h \leqslant 1/n$. Тогда, пользуясь доказанным уже для показателя $1/n$ неравенством (4.6.1), получаем

$$a^h - 1 \leqslant a^{1/n} - 1 \leqslant \frac{a-1}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{a-1}{n+1} < \frac{n+1}{n}(a-1)h \leqslant 2(a-1)h.$$

Лемма доказана.

Будем по-прежнему считать $a > 1$. Для рациональных x имеем

$$a^x = \sup_{r \leqslant x,\, r \in \mathbb{Q}} a^r. \tag{4.6.2}$$

Примем формулу (4.6.2) в качестве определения a^x при $a > 1$ для иррациональных x. Теперь степень a^x при $a > 1$ определена для всех действительных x.

Наша цель — выяснить свойства показательной функции $y = a^x$, в частности, доказать ее непрерывность.

Перечислим свойства функции a^x при $a > 1$.

1°. $a^x > 0$. Это — простое следствие из (4.6.2).

2°. Функция a^x строго возрастает, т.е. если $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Сначала заметим, что нестрогое неравенство $a^{x_1} \leqslant a^{x_2}$ вытекает из того, что для a^{x_2} в (4.6.2) верхняя грань берется по более широкому множеству рациональных чисел, чем для a^{x_1}.

Возьмем рациональные числа α и β такие, что $x_1 < \alpha < \beta < x_2$. Тогда в силу строгой монотонности a^x для рациональных показателей имеем

$$a^{x_1} \leqslant a^{\alpha} < a^{\beta} \leqslant a^{x_2}$$

и мы получили нужное неравенство.

3°. $a^x \to +\infty$ при $x \to +\infty$; $a^x \to 0$ при $x \to -\infty$.

Это вытекает из свойств степени с целым показателем и строгого возрастания функции a^x.

4°. Функция a^x непрерывна.

Зафиксируем произвольную точку x_0 и докажем непрерывность функции a^x в этой точке.

Сначала установим непрерывность справа. Пусть $x > x_0$ и $x - x_0 < 1/2$. Возьмем рациональные числа α и β такие, что $\alpha < x_0 < x < \beta$ и $\beta - \alpha < 2(x - x_0)$. Тогда $\beta - \alpha < 1$ и пользуясь сначала строгим возрастанием функции a^x, а затем оценкой (4.6.1), находим

$$\begin{gathered} a^x - a^{x_0} < a^{\beta} - a^{\alpha} = a^{\alpha}(a^{\beta-\alpha} - 1) < \\ < a^{x_0} \cdot 2(a-1)(\beta - \alpha) < 4a^{x_0}(a-1)(x - x_0). \end{gathered}$$

Так как множитель $4a^{x_0}(a-1)$ от x не зависит, то полученная оценка доказывает непрерывность функции a^x в точке x_0 справа.

При доказательстве непрерывности слева рассуждения аналогичны. Если $x < x_0$ и $x_0 - x < 1/2$, то выбираем рациональные числа α и β такие, что $\alpha < x < x_0 < \beta$ и $\beta - \alpha < 2(x_0 - x)$. Тогда справедливы оценки

$$a^{x_0} - a^x < a^\beta - a^\alpha = a^\alpha(a^{\beta-\alpha} - 1) <$$
$$< a^{x_0} \cdot 2(a-1)(\beta - \alpha) < 4a^{x_0}(a-1)(x - x_0),$$

показывающие непрерывность слева.

5°. Основное свойство степени: $a^{x+y} = a^x + a^y$ для любых x и y.

Выберем такие последовательности рациональных чисел $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, что $\alpha_n \to x$ и $\beta_n \to y$ при $n \to \infty$. Тогда $\alpha_n + \beta_n \to x + y$ и в силу основного свойства степени для рациональных показателей

$$a^{\alpha_n + \beta_n} = a^{\alpha_n} \cdot a^{\beta_n}.$$

Переходим в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$ и, пользуясь непрерывностью показательной функции, получаем нужное равенство.

Прежде чем говорить о других свойствах показательной функции при $a > 1$, распространим ее определение на $a < 1$. Если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$ и положим

$$a^x := \frac{1}{(1/a)^x}.$$

Тогда все свойства 1°–5° показательной функции переносятся на случай $0 < a < 1$, но только теперь функция a^x строго убывает.

Продолжаем выяснение свойств показательной функции a^x. Теперь основание степени a — любое положительное число, не равное 1.

6°. Для произвольных чисел x и y

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Если y — натуральное число, то из основного свойства степени получаем

$$(a^x)^y = \underbrace{a^x \cdot a^x \cdot \dots \cdot a^x}_{y} = a^{xy}.$$

Отсюда находим, что если q — натуральное число, то

$$(a^{x/q})^q = a^{(x/q)q} = a^x$$

и, извлекая корень степени q, видим, что $a^{x/q} = (a^x)^{1/q}$, т.е. свойство 6° доказано для чисел y вида $1/q$.

Пусть теперь $y = p/q$, где p и q — натуральные числа. Тогда в силу уже доказанного имеем

$$(a^x)^{p/q} = (a^x)^{p\cdot(1/q)} = (a^{xp})^{1/q} = a^{x\cdot(p/q)},$$

а если $y = -p/q$, где p и q — натуральные числа, то

$$(a^x)^{-p/q} = \frac{1}{(a^x)^{p/q}} = \frac{1}{a^{x\cdot(p/q)}} = a^{-x\cdot(p/q)}$$

и, значит, свойство 6° доказано для рациональных y.

Теперь, если y иррационально, выбираем последовательность рациональных чисел α_n, сходящуюся к y. Тогда по уже доказанному

$$(a^x)^{\alpha_n} = a^{x\alpha_n}$$

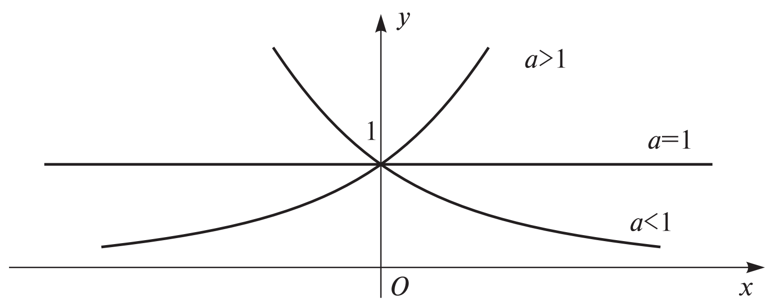
и, пользуясь непрерывностью показательной функции, переходим в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$. Так получаем свойство 6^0. в полном объеме.

7^0. $(ab)^x = a^x\, b^x$ для любых положительных a и b и любого x.

Для доказательства достаточно взять последовательность рациональных чисел $\{\alpha_n\}$, сходящуюся к x, и перейти к пределу в равенстве $(ab)^{\alpha_n} = a^{\alpha_n}\, b^{\alpha_n}$.

Подведем итог. Степень a^x, $a > 0$, определена для всех $x \in \mathbb{R}$ и показательная функция a^x обладает всеми свойствами, которые были известны из школьного курса для рациональных x. Кроме того, показательная функция непрерывна на всей оси.

На рисунке изображены графики функции a^x при $a > 1$, $a < 1$, а также при $a = 1$, который приведен для полноты картины.

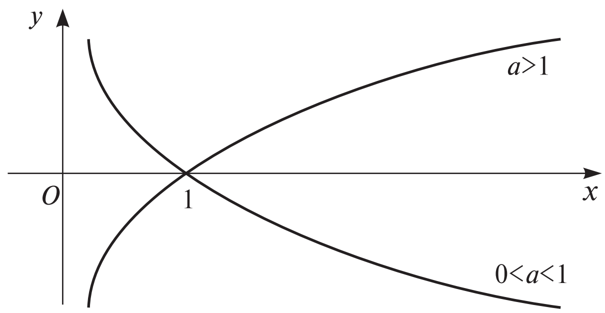


§ 4.7. Элементарные функции

Логарифмическая функция. Так как функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, строго монотонна и непрерывна на всей оси, а область ее значений — полуось $(0, +\infty)$, то на $(0, +\infty)$ можно определить обратную функцию, которую называют логарифмической функцией по основанию a и обозначают $x = \log_a y$.

Выясним свойства логарифмической функции, причем независимую переменную, будем, как обычно, обозначать x, а зависимую y, т.е. будем говорить о функции $y = \log_a x$.

Учитывая характер монотонности функции a^x, видим, что функция $\log_a x$ при $a > 1$ строго возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, а при $0 < a < 1$ строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$. График логарифмической функции имеет вид:



Из того, что показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, вытекают тождества

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x.$$

Докажем свойства логарифмов.

1°. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ для любых положительных x и y. Имеем

$$a^{\log_a(xy)} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Так как показательная функция принимает каждое свое значение только один раз, то в полученном равенстве можно приравнять показатели степени, что приводит к требуемому результату.

2°. Если в формуле из 1° вместо x записать x/y, то получим

$$\log_a\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \log_a x = \log_a \frac{x}{y} + \log_a y,$$

откуда следует, что для произвольных положительных x и y

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

3°. Если $x > 0$, то для произвольного y справедливо равенство

$$\log_a x^y = y \log_a x.$$

В самом деле,

$$a^{\log_a x^y} = x^y = \left(a^{\log_a x}\right)^y = a^{y \log_a x}$$

и нужное равенство получаем, приравнивая показатели степени.

4°. Если числа a и b положительны и не равны 1, то

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

Действительно,

$$a^{\log_a b \cdot \log_b a} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a$$

и опять приравниваем показатели.

Если в качестве основания логарифма взято число e, то такие логарифмы называют натуральными. В связи с этим число e называют основанием натуральных логарифмов. Для натурального логарифма числа x используются обозначения $\ln x$ и $\log x$.

Степенная функция. Функцию $y = x^a$, где $x > 0$ и a — произвольное число, называют степенной функцией.

Степенную функцию можно представить как сложную функцию

$$x^a = \left(e^{\ln x}\right)^a = e^{a \ln x}.$$

Отсюда в силу теоремы о непрерывности сложной функции вытекает непрерывность степенной функции, так как непрерывность логарифмической и показательной функций известны.

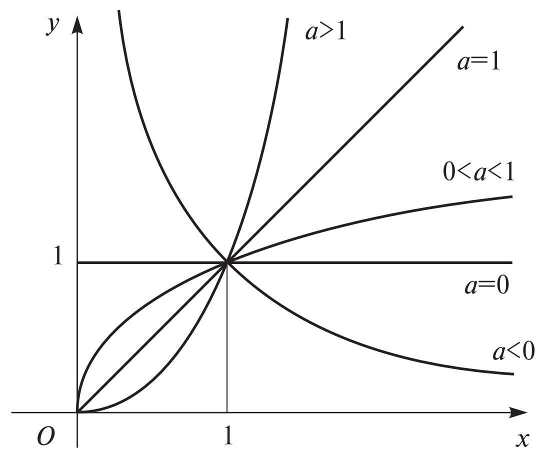
При $a > 0$ степенную функцию доопределяют в нуле, полагая $0^a := 0$. Тогда функция $y = x^a$ становится непрерывной на $[0, +\infty)$.

На рисунке изображены графики степенной функции при различных значениях показателя a.

Если a — целое число, то функцию x^a можно рассматривать и для отрицательных значений x. При этом полагают $x^0 \equiv 1$ при всех x, в том числе и при $x = 0$. Для целых значений показателя a степенная функция является четной или нечетной в зависимости от четности или нечетности a.

Если a — нечетное число, то функция x^a обратима для всех x при положительных a и обратима для всех $x \neq 0$ при отрицательных a.

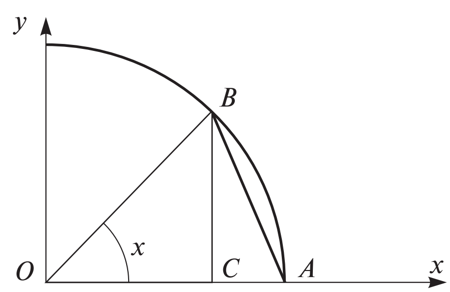
Тригонометрические функции. Определение тригонометрических функций известно из школьного курса. Докажем их непрерывность.



Теорема 4.7.1. *Для любого значения x справедливо неравенство*

$$|\sin x| \leqslant |x|. \tag{4.7.1}$$

Доказательство. При $x = 0$ и левая и правая части неравенства (4.7.1) равны нулю. Покажем, что для остальных значений x в (4.7.1) имеет место строгое неравенство. Будем считать, что $0 < x < \pi/2$. Рассмотрим окружность радиуса 1.



Возьмем угол $\angle AOB$, радианная мера которого равна x. Тогда длина дуги $\smile AB$ равна x, а $\sin x = BC$. Но длина дуги $\smile AB$ больше, чем длина хорды AB, а длина отрезка AB как гипотенузы прямоугольного треугольника $\triangle ABC$ больше, чем длина катета BC. Этим неравенство (4.7.1) доказано для $0 < x < \pi/2$.

Так как функции и в левой и в правой частях неравенства (4.7.1) четные, то неравенство (4.7.1) справедливо и для $-\pi/2 < x < 0$. А если $|x| \geqslant \pi/2$, то (4.7.1) следует из того, что $|\sin x| \leqslant 1$.

Теорема доказана.

Теорема 4.7.2. *Каждая из функций* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ *и* $y = \operatorname{ctg} x$ *непрерывна в своей области определения.*

Доказательство. Начнем с доказательства непрерывности функции $y = \sin x$. Дадим аргументу приращение Δx и рассмотрим приращение функции:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Значит, в силу (4.7.1)

$$|\Delta y| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant |\Delta x|.$$

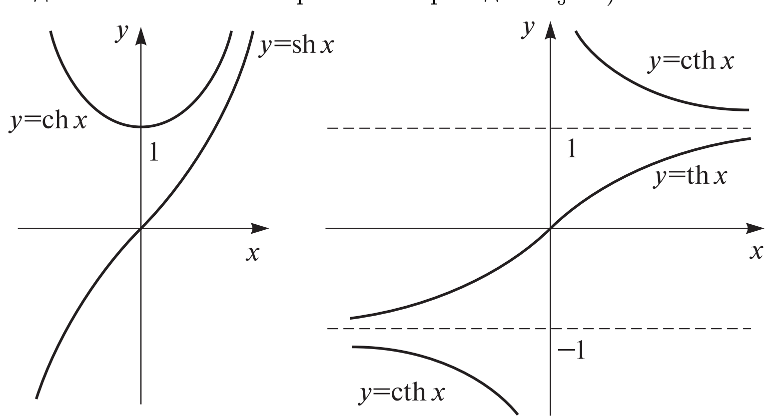
Отсюда следует, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, что и доказывает непрерывность синуса.

Непрерывность косинуса можно доказать аналогично, а можно воспользоваться равенством $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ и теоремой о непрерывности сложной функции.

Непрерывность тангенса и котангенса получаем, ссылаясь на теорему о непрерывности частного.

Из непрерывности функции тангенс на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ в силу теоремы 4.5.2 следует, что значениями этой функции являются все действительные числа. Так как функция тангенс строго возрастает на $(-\pi/2, \pi/2)$, то она осуществляет взаимно однозначное соответствие интервалов $(-\pi/2, \pi/2)$ и $(-\infty, +\infty)$.

В § 1.8 было установлено, что любой конечный интервал имеет мощность континуум. Поэтому теперь мы можем сказать, что и множество всех действительных чисел имеет мощность континуум (без доказательства этот факт был приведен в § 1.8).



Гиперболические функции. Функции

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

называются соответственно гиперболическим синусом, гиперболическим косинусом, гиперболическим тангенсом и гиперболическим котангенсом.

Они определены для всех x. Исключение составляет только гиперболический котангенс, который не определен в точке $x = 0$. Все гиперболические функции непрерывны в области своего определения. Это вытекает из теоремы о непрерывности сложной функции.

Определение. *Элементарными функциями* называются показательная, логарифмическая, степенная, основные и обратные тригонометрические функции и все функции, которые могут быть получены из перечисленных функций с помощью арифметических действий, взятия обратных функций и построения сложных функций.

В силу доказанных теорем каждая элементарная функция непрерывна в своей области определения.

§ 4.8. Вычисление некоторых пределов

В этом параграфе будут найдены пределы некоторых выражений вида

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{4.8.1}$$

когда предел функции $g(x)$ при $x \to 0$ равен нулю и поэтому нельзя переходить к пределу отдельно в числителе и в знаменателе дроби.

1°. Найдем предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

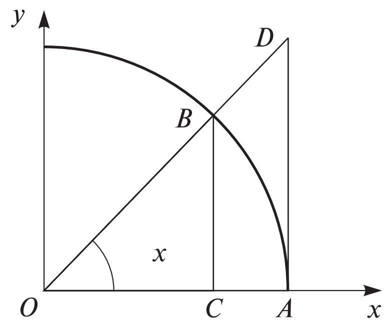
Будем опираться на геометрические соображения. Пусть сначала $0 < x < \pi/2$. Рассмотрим часть окружности радиуса R с центром в начале координат, расположенную в первом квадранте.

Из подобия прямоугольных треугольников OAD и OCB находим

$$\frac{AD}{R \sin x} = \frac{R}{R \cos x},$$

т.е. $AD = R \operatorname{tg} x$. Значит, площадь треугольника OAD равна

$$\frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x.$$



Площадь кругового сектора OAB равна $R^2x/2$. Поэтому

$$R^2\,\frac{x}{2} < \frac{1}{2}\,R^2\,\mathrm{tg}\,x,$$

откуда следует, что $x < \mathrm{tg}\,x$, и, значит,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x}.$$

В силу (4.7.1) $\sin x < x$. Таким образом,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Так как все функции в этом неравенстве четные, то оно имеет место и при $x \in (-\pi/2, 0)$.

В силу непрерывности функции косинус, если $x \to 0$, то $\cos x \to 1$. Поэтому согласно теореме 3.3.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{4.8.2}$$

Далее будет нужна новая функция — целая часть числа. Обычно эту функцию обозначают $[x]$, иногда $E(x)$.

По определению

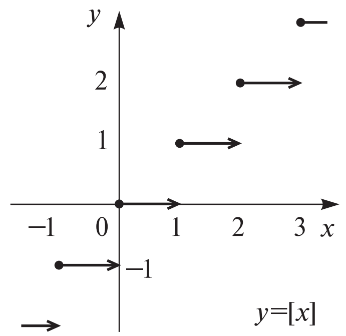
$$[x] := \max_{n\leqslant x;\, n\in\mathbb{Z}} n.$$

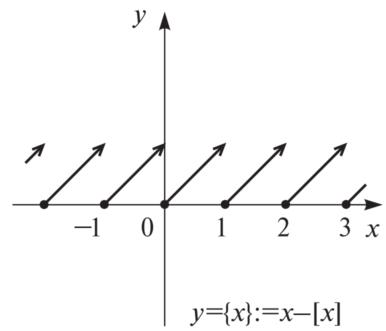
График функции $[x]$ изображен на рисунке.

2°. Покажем, что

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e. \tag{4.8.3}$$

Для $x = 1/n$, $n \to \infty$, в § 2.6 было доказано, что такой предел существует. Он был взят в качестве определения числа e.





Если $x > 0$, то

$$(1+x)^{1/x} = \left(1 + \frac{1}{1/x}\right)^{1/x} \leqslant \left(1 + \frac{1}{[1/x]}\right)^{[1/x]+1} =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{[1/x]}\right)^{[1/x]} \cdot \left(1 + \frac{1}{[1/x]}\right),$$

а предел последнего выражения при $x \to +0$ равен e. С другой стороны,

$$(1+x)^{1/x} \geqslant \left(1+\frac{1}{1/x}\right)^{[1/x]} \geqslant \left(1+\frac{1}{[1/x]+1}\right)^{[1/x]+1} \cdot \left(1+\frac{1}{[1/x]+1}\right)^{-1}.$$

При $x \to +0$ предел полученного выражения также равен e и, таким образом, в силу теоремы 3.3.4 равенство (4.8.3) доказано для $x \to +0$.

Пусть теперь $x < 0$. Тогда

$$(1+x)^{1/x} = (1-|x|)^{-1/|x|} = \left(\frac{1}{1-|x|}\right)^{1/|x|} = \left(1 + \frac{|x|}{1-|x|}\right)^{1/|x|} =$$
$$= \left(1 + \frac{|x|}{1-|x|}\right)^{\frac{1-|x|}{|x|}} \cdot \left(1 + \frac{|x|}{1-|x|}\right).$$

Но если $x \to 0$, то

$$\frac{|x|}{1-|x|} \to 0.$$

Поэтому в силу доказанного уже равенства (4.8.3) для $x > 0$ получаем, что оно имеет место и для $x < 0$.

3°. Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$. Найдем предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}.$$

Пользуясь непрерывностью логарифмической функции и равенством (4.8.3), получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}=$$
$$=\log_a\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right)=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}, \tag{4.8.4}$$

в частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \tag{4.8.5}$$

4°. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$$

для $a>0$ и $a\neq 1$.

Положим $a^x-1=t$. Тогда $a^x=1+t$ и $x=\log_a(1+t)$. Значит,

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{t}{\log_a(1+t)}.$$

В силу непрерывности показательной функции $t\to 0$ при $x\to 0$. Поэтому, пользуясь равенством (4.8.4), находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{4.8.6}$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{4.8.7}$$

Глава 5
ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

§ 5.1. Производная

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Придадим аргументу x_0 достаточно малое приращение

Δx, чтобы не выйти из области определения функции, и рассмотрим приращение функции f, соответствующее этому приращению аргумента:

$$\Delta y = \Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента и поставим вопрос о существовании предела этого отношения при $\Delta x \to 0$.

Определение. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{5.1.1}$$

то значение этого предела называют *производной функции f в точке x_0*, обозначают $f'(x_0)$ и говорят, что функция f имеет в точке x_0 производную.

Теорема 5.1.1. *Если функция f в некоторой точке имеет производную, то f непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Из существования предела (5.1.1) следует, что в достаточно малой окрестности точки x_0 справедливо равенство

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x), \tag{5.1.2}$$

где $\varepsilon(\Delta x)$ — некоторая функция от Δx такая, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0. \tag{5.1.3}$$

В силу (5.1.2)

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

При $\Delta x \to 0$ выражение из правой части этого равенства стремится к нулю, т.е. $\Delta y \to 0$, а это означает непрерывность функции f в точке x_0.

Теорема доказана.

Таким образом, необходимым условием существования производной функции в точке является непрерывность функции в этой точке. Но это условие не является достаточным.

В самом деле, пусть $y := |x|$. Тогда для приращения функции в нуле справедливо равенство $\Delta y = |\Delta x|$ и, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases} \tag{5.1.4}$$

Значит, функция $|x|$ не имеет производной в нуле, хотя она и непрерывна всюду.

Заметим, что в данном примере существуют односторонние пределы отношения приращения функции к приращению аргумента (5.1.4). В таких случаях говорят об односторонних производных.

Определение. Пусть функция f определена в некоторой правой окрестности точки x. Если существует односторонний предел

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{5.1.5}$$

то говорят, что функция f имеет в точке x *правую одностороннюю производную* $f'_+(x)$, равную значению предела (5.1.5).

Если функция f оределена в некоторой левой окрестности точки x и существует односторонний предел

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{5.1.6}$$

то говорят, что функция f имеет в точке x *левую одностороннюю производную* $f'_-(x)$, равную значению этого предела.

Слово "одностороннюю" здесь часто опускают и говорят о правой производной или производной справа, соответственно, левой производной и производной слева.

Таким образом, для функции $f(x) = |x|$ имеем $f'_+(0) = 1$ и $f'_-(0) = -1$.

Приведем пример функции, непрерывной всюду, но не имеющей в некоторой точке односторонних производных.

Пусть

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Так как $|f(x)| \leqslant |x|$, то функция f непрерывна в нуле, а ее непрерывность в остальных точках очевидна. Для приращения f в нуле имеем

$$\Delta f = \Delta x \, \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

Значит,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}$$

и у функции f в нуле не существуют не только производная, но и односторонние производные.

Выведем правила вычисления производных.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x. Так как эти функции определены в некоторой окрестности точки x, то правомерен вопрос о существовании производных функций, полученных в результате арифметических действий над функциями $u(x)$ и $v(x)$.

Теорема 5.1.2. *Пусть в некоторой точке x функции u и v имеют производные. Тогда в этой точке существуют следующие производные и выполняются равенства:*

1°. $(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$.

2°. $(u(x)-v(x))' = u'(x)-v'(x)$.

3°. $(u(x)\,v(x))' = u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$.

4°. *Если $v(x)\neq 0$, то*

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\,v(x)-u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}.$$

Доказательство. 1°. Имеем

$$\Delta(u+v) = u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-(u(x)+v(x)) = \Delta u+\Delta v.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Дроби в правой части этого равенства имеют пределы при $\Delta x \to 0$, поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x)+v'(x).$$

Доказательство свойства 2° аналогично.

3°. Имеем

$$\Delta(uv) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x).$$

Так как $\Delta u = u(x+\Delta x)-u(x)$, то $u(x+\Delta x) = u(x)+\Delta u$. Поэтому

$$\begin{aligned}\Delta(u\,v) &= (u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v)-u(x)\,v(x) =\\ &= \Delta u\cdot v(x)+u(x)\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v\end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)+u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Каждое слагаемое, стоящее в этом равенстве справа, при $\Delta x \to 0$ имеет предел, причем $\Delta v \to 0$ в силу непрерывности функции v. Значит,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u\,v)}{\Delta x} = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x).$$

4°. Сначала рассмотрим частный случай, когда $u(x) \equiv 1$, т.е. получим формулу для производной дроби $1/v(x)$.

Так как функция v в точке x непрерывна и $v(x) \neq 0$, то v не обращается в нуль в некоторой окрестности точки x. Поэтому для достаточно малых приращений Δx имеем

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v(x+\Delta x)} - \frac{1}{v(x)} = \frac{v(x) - v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\,v(x)} = \frac{-\Delta v}{v(x+\Delta x)\,v(x)}.$$

Отсюда

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) : \Delta x = -\frac{1}{v(x+\Delta x)\,v(x)} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Выражение из правой части этого равенства имеет предел при $\Delta x \to 0$. Значит, существует предел выражения из левой части и, таким образом,

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Теперь с помощью формулы для производной произведения получим формулу для производной частного в общем случае:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \left(u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x)\frac{1}{v(x)} - u(x)\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

и осталось только привести полученные дроби к общему знаменателю.

Теорема доказана.

Выведем формулы для производных некоторых элементарных функций.

1°. Если функция f равна константе, т.е. для всех x принимает одно и то же значение C, то $\Delta f = 0$ и, таким образом, $C' = 0$.

Поэтому для произвольной функции u, имеющей в точке x производную, с помощью формулы производной произведения получаем

$$(Cu(x))' = Cu'(x).$$

Конечно, это легко было получить и непосредственно, рассматривая приращение функции $Cu(x)$.

2°. Рассмотрим степенную функцию с целым показателем, т.е. функцию $f(x) = x^n$, где n — целое число.

Покажем, что

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \tag{5.1.7}$$

где x — любое, если $n \geqslant 1$, и x — любое неравное нулю число, если $n < 0$.

Сначала установим формулу для натуральных n, проведя индукцию по n.

При $n = 1$ имеем $\Delta f = \Delta x$, откуда следует, что $x' = 1$.

Будем теперь считать формулу (5.1.7) доказанной для показателя n и докажем ее для показателя $n + 1$.

По формуле производной произведения имеем

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Таким образом, равенство (5.1.7) установлено для всех натуральных n.

Рассмотрим случай, когда n — целое отрицательное число.

Положим $m := -n$. Тогда $m > 0$ и для $x \neq 0$

$$x^n = \frac{1}{x^m}.$$

По формуле производной частного имеем

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{x^{2m}} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

и равенство (5.1.7) для целых отрицательных показателей доказано.

Так как по определению степенной функции с нулевым показателем $x^0 \equiv 1$, то $(x^0)' = 0$. Поэтому можно считать, что формула (5.1.7) имеет место и при $n = 0$, если условиться, что в этом случае правая часть в (5.1.7) равна нулю.

В дальнейшем будет показано, что равенство (5.1.7) имеет место для любых, а не только целых показателей n.

3°. Найдем производную показательной функции $y = a^x$. Так как

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \, \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

то в силу (4.8.6) имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

Таким образом,

$$(a^x)'=a^x\,\ln a,\quad -\infty<x<\infty. \tag{5.1.8}$$

В частности, если $a=e$, то

$$(e^x)'=e^x. \tag{5.1.9}$$

4°. Найдем производную логарифмической функции $y=\log_a x$.

Преобразуем приращение функции, чтобы было удобно воспользоваться пределом (4.8.4). Имеем

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{(\Delta x)/x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\cdot\frac{1}{x},$$

откуда в силу (4.8.4) получаем

$$(\log_a x)'=\log_a e\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}. \tag{5.1.10}$$

В частности,

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}. \tag{5.1.11}$$

Равенства (5.1.10) и (5.1.11) имеют место для всех $x>0$.

5°. Найдем производные тригонометрических функций.

Пусть $y=\sin x$. Тогда

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Отсюда, пользуясь формулой (4.8.2) и непрерывностью функции $\cos x$, находим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\Delta x}\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$

Таким образом,

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{5.1.12}$$

Аналогично вычисляется производная функции $y = \cos x$:

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = 2\sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

значит,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x.$$

Итак,

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{5.1.13}$$

Равенства (5.1.12) и (5.1.13) имеют место для всех x.

Производные тангенса и котангенса находим, пользуясь формулой производной частного и производными синуса и косинуса:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}; \tag{5.1.14}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{5.1.15}$$

Каждая из формул (5.1.14) и (5.1.15) справедлива для всех x, при которых определены тангенс и, соответственно, котангенс.

Вычисление производных других элементарных функций требует знания свойств производных, которые будут установлены позднее.

В определении производной предел (5.1.1) считают конечным. Но иногда нужно рассматривать и случаи, когда этот предел равен $+\infty$ или $-\infty$. Тогда говорят о соответствующей бесконечной производной. Как и для пределов функции, если не сказано, что производная может быть бесконечной, то считают, что эта производная конечна.

§ 5.2. Дифференциал функции

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x. Если приращение функции f в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \tag{5.2.1}$$

где A — некоторое число, то говорят, что функция f *дифференцируема* в точке x.

Иногда нужно рассматривать приращение Δy и при $\Delta x = 0$. В этом случае считают, что при $\Delta x = 0$ остаточный член в формуле (5.2.1) равен нулю.

Теорема 5.2.1. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы f имела в этой точке производную. Если это условие выполнено, то*

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0. \tag{5.2.2}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 5.1.1 мы видели, что из существования производной функции f в точке x следует оценка (5.1.2), которую в силу (5.1.3) можно записать как (5.2.2). Отсюда следует достаточность в теореме 5.2.1.

Чтобы доказать необходимость, разделим обе части (5.2.1) на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + o(1), \quad \Delta x \to 0.$$

Это соотношение означает, что функция f имеет в точке x производную, равную A, т.е. из (5.2.1) следует (5.2.2).

Теорема доказана.

Таким образом, равносильны утверждения, что функция имеет в некоторой точке производную и что функция дифференцируема в этой точке.

Если для приращения функции f имеет место представление (5.2.1), то слагаемое $A\,\Delta x$ называют линейной частью приращения функции f.

Определение. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке, то линейную часть приращения функции называют *дифференциалом* функции в этой точке и обозначают df или $df(x)$.

Таким образом,

$$df(x) := f'(x)\Delta x. \tag{5.2.3}$$

Подчеркнем, что здесь речь идет о дифференциале функции f как функции аргумента x.

В общем случае $dy \neq \Delta y$, так как в силу (5.2.2) приращение Δy имеет еще слагаемое $o(\Delta x)$.

Для единообразия обозначений наряду с дифференциалом функции вводят дифференциал независимой переменной, полагая по определению $dx := \Delta x$.

Если использовать дифференциал независимой переменной, то дифференциал функции dy можно записать так: $dy = f'(x)\,dx$, откуда

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{5.2.4}$$

Следовательно, производная равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной. Иногда равенство (5.2.4) рассматривают просто как другое обозначение производной.

Для дифференциалов справедливы следующие формулы:

$$d(u \pm v) = du \pm dv; \tag{5.2.5}$$

$$d(u\,v) = u\,dv + v\,du \tag{5.2.6}$$

и, если $v(x) \neq 0$, то

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \tag{5.2.7}$$

Во всех этих равенствах предполагается, что функции u и v дифференцируемы в некоторой точке, и утверждается существование в этой точке дифференциалов функций, полученных из u и v с помощью арифметических действий, и даются выражения для этих дифференциалов.

Доказательство равенств (5.2.5)–(5.2.7) проводится однотипно. Например, в силу (5.2.3) и формулы для производной произведения имеем

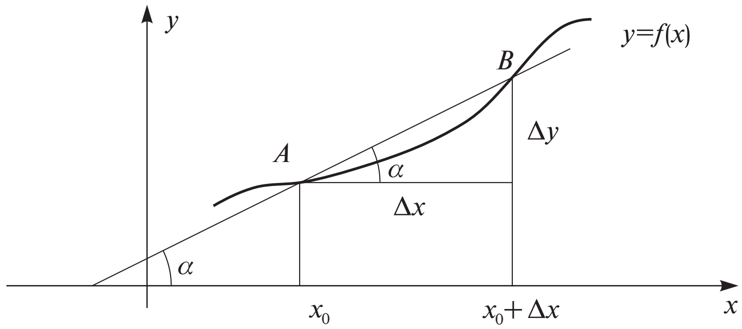
$$d(u\,v) = (u\,v)'dx = u'\,vdx + u\,v'dx = du\,v + u\,dv.$$

Выясним геометрический смысл производной и дифференциала.

Сначала рассмотрим, какому свойству графика функции соответствует существование производной.

Пусть функция f непрерывна в точке x_0. Будем придавать аргументу x_0 такие приращения Δx, чтобы точки $x_0 + \Delta x$ не выходили за область определения функции f.

Отметим на графике функции f точки $A(x_0, f(x_0))$ и $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ и проведем через эти точки прямую. Пусть α — угол, который образует прямая AB с осью абсцисс OX. Угол α считаем положительнным, если прямая AB правее точки пересечения с осью OX лежит выше оси, а в противном случае α считаем отрицательным. Если прямая AB параллельна оси абсцисс OX, то полагаем $\alpha = 0$.



Так как $\Delta y = f(x_0 + \Delta x)) - f(x_0)$, то из рисунка видно, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (5.2.8)$$

В силу непрерывности функции f в точке x_0 точка B графика функции при $\Delta x \to 0$ неограниченно приближается к точке A. При этом значение угла α зависит от Δx.

Равенство (5.2.8) показывает, что существование производной функции f в точке x_0 равносильно существованию предела $\operatorname{tg} \alpha$ при $\Delta x \to 0$. Так как тангенс является непрерывной функцией, то существование предела $\operatorname{tg} \alpha$ равносильно существованию предельного значения угла α, которое обозначим α_0. А это в свою очередь означает, что при $\Delta x \to 0$ секущая AB занимает предельное положение, соответствующее углу наклона α_0. Прямую, полученную как предельное положение секущей, называют касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0. При этом

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Итак, существование производной равносильно существованию касательной к графику функции, как предельного положения секущей, а значение производной равно тангенсу угла наклона касательной.

Заметим, что в этих рассуждениях можно было иметь в виду односторонние производные.

Физический смысл производной — это скорость изменения зависимой переменной y как функции независимой переменной x. Если y — путь, пройденный точкой при движении по прямой, а x — время, то производная — это скорость движения.

В физике производную называют мгновенной скоростью в отличие от средней скорости за определенный промежуток времени, которая равна отношению приращения функции к приращению аргуметна.

Вообще, если функция описывает некоторый процесс, то производная характеризует мгновенную скорость протекания этого процесса.

Дифференциал функции равен приращению ординаты касательной при заданном Δx. Таким образом, дифференциал — это линейная функция, графиком которой является касательная. Дифферениал показывает, как менялась бы функция, если в течение всего времени изменение функции проходило бы с той же скоростью, что и данный момент.

Применение дифференциалов опирается на то, что "в малом", т.е. при достаточно малых Δx, приращение функции незначительно отличается от приращения линейной функции, т.е. от дифференциала и, значит, дифференциал дает хорошее приближение для приращения функции.

§ 5.3. Производная обратной функции

Пусть на интервале (a, b) задана непрерывная строго монотонная функция $y = f(x)$.

Обозначим через (A, B) образ интервала (a, b) при отображении, осуществляемом функцией f. Тогда согласно теореме 4.5.2 на (A, B) определена непрерывная строго монотонная обратная функция $x = \varphi(y)$.

Выясним, как связаны дифференцируемость исходной функции f в точке x_0 и дифференцируемость обратной функции φ в точке $y_0 := f(x_0)$.

Будем рассматривать такие приращения аргумента Δx, при которых точки $x_0 + \Delta x$ принадлежат интервалу (a, b). Тогда в силу непрерывности функции f в точке x_0 из $\Delta x \to 0$ следует $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$.

Если аргументу y обратной функции $\varphi(y)$ давать такие приращения, при которых точки $y_0 + \Delta y$ не выходят за пределы интервала (A, B), то для приращений Δx, которые будет получать функция φ, в силу непрерывности обратной функции получим, что из $\Delta y \to 0$ следует $\Delta x \to 0$.

Таким образом, в нашем случае условия $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ равносильны.

Предположим, что существует производная $f'(x_0)$, и рассмотрим вопрос о существовании производной $\varphi'(y_0)$.

При достаточно малых приращениях аргумента Δy функция φ получает приращение $\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)$ и существование производной $\varphi'(y_0)$ равносильно существованию предела

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Так как функция φ строго монотонна, то из $\Delta y \neq 0$ следует $\Delta x \neq 0$. Поэтому

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right). \tag{5.3.1}$$

Если $f'(x_0) \neq 0$, то пользуясь равносильностью условий $\Delta y \to 0$ и $\Delta x \to 0$, из (5.3.1) находим

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 : \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5.3.1. *Если непрерывная функция $f(x)$ строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0, имеет в этой точке производную и $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $\varphi(y)$ имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ производную и справедливо равенство*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{5.3.2}$$

Если $f'(x_0) = 0$, то формула (5.3.2) не имеет смысла. Выясним, что можно сказать о производнрй обратной функции в этом случае.

Если функция f строго возрастает, то приращения Δy и Δx имеют одинаковые знаки. Поэтому их отношение положительно и, переходя в (5.3.1) к пределу при $\Delta y \to 0$ (или, что то же самое, при $\Delta x \to 0$), видим, что

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = +\infty.$$

А если функция f строго убывает, то отношение приращений Δy и Δx отрицательно. Значит, в этом случае

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\infty.$$

Таким образом, можно считать, что формула (5.3.2) имеет место и при $f'(x_0) = 0$, если договориться, что в этом случае она означает существование бесконечной производной $\varphi'(y_0)$, равной $+\infty$ или $-\infty$ в зависимости от того, возрастает или убывает функция f.

В соответствии с этим считают, что если существует одна из производных $f'(x_0)$ или $\varphi'(y_0)$, конечная или бесконечная, то существует и вторая и их значения связаны соотношением (5.3.2).

Воспользуемся формулой производной обратной функции для вычисления производных элементарных функций.

Заметим, что так как показательная функция $y = a^x$ и логарифмическая функция $y = \log_a x$ являются взаимно обратными, то формулу для производной одной их этих функций можно получить из формулы для другой функции.

Получим, например, из равенства $(a^x)' = a^x \ln a$ формулу для производной логарифмической функции.

Если $y = \log_a x$, то $x = a^y$. Поэтому согласно (5.3.2) имеем

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Найдем производные обратных тригонометрических функций.

1°. Если $y = \arcsin x$, то $x = \sin y$. Поэтому

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (5.3.3)$$

2°. Аналогично вычисляется производная функции $y = \arccos x$. Имеем $x = \cos y$ и

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (5.3.4)$$

Формулы (5.3.3) и (5.3.4) справедливы для всех $x \in [-1, 1]$. Они показывают, что при $x = \pm 1$ существуют бесконечные односторонние производные.

3°. Если $y = \operatorname{arctg} x$, то $x = \operatorname{tg} y$ и согласно (5.3.2)

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (5.3.5)$$

4°. Аналогично для $y = \operatorname{arcctg} x$ находим

$$\begin{gathered}(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y = \\ = -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.\end{gathered} \qquad (5.3.6)$$

Формулы (5.3.5) и (5.3.6) имеют место для всех x.

§ 5.4. Производная сложной функции

Теорема 5.4.1. *Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, $y_0 := f(x_0)$ и функция $z = \varphi(y)$ имеет производную в точке y_0. Тогда сложная функция $z = \psi(x) := \varphi(f(x))$ имеет производную в точке x_0 и справедливо равенство*

$$\psi'(x_0) = \varphi'(y_0)\, f'(x_0). \tag{5.4.1}$$

Доказательство. Существование сложной функции $\psi(x)$ согласно сказанному в § 4.1 вытекает из непрерывности функций $f(x)$ и $\varphi(y)$.

Из условий теоремы следует, что для приращений функций f и φ в точках x_0 и y_0 соответственно справедливы равенства

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x) \tag{5.4.2}$$

и

$$\Delta z = \varphi'(y_0)\Delta y + \Delta y \cdot \varepsilon_1(\Delta y), \tag{5.4.3}$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\varepsilon_1(\Delta y) \to 0$ при $\Delta y \to 0$.

Чтобы выразить приращение Δz через Δx, подставим в первое слагаемое из правой части формулы (5.4.3) вместо Δy его представление из (5.4.2). Значение Δy, найденное по формуле (5.4.2), может оказаться равным нулю. Как говорилось в § 5.2, считаем $\varepsilon_1(0) = 0$.

Тогда получим

$$\begin{aligned}\Delta z &= \varphi'(y_0)\left(f'(x_0)\Delta x + \Delta x\, \varepsilon(\Delta x)\right) + \Delta y\, \varepsilon_1(\Delta y) = \\ &= \varphi'(y_0)\, f'(x_0)\, \Delta x + \varphi'\,(y_0)\, \Delta x\, \varepsilon(\Delta x) + \Delta y\, \varepsilon_1(\Delta y).\end{aligned}$$

Разделим левую и правую части этого равенства на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \varphi'(y_0)\, f'(x_0) + \varphi'(y_0)\, \varepsilon(\Delta x) + \frac{\Delta y}{\Delta x}\, \varepsilon_1(\Delta y). \tag{5.4.4}$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$. Поэтому переход в (5.4.4) к пределу при $\Delta x \to 0$ приводит к равенству

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \varphi'(y_0)\, f'(x_0).$$

Таким образом, доказаны и существование производной $\psi'(x_0)$ и равенство (5.4.1).

Для обозначения значения производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 употребляется также запись $y'_x(x_0)$. В этих обозначениях формула для производной сложной функции имеет вид

$$z'_x(x_0) = z'_y(y_0) \cdot y'_x(x_0). \tag{5.4.5}$$

Приведем примеры применения формулы производной сложной функции.

1°. Найдем производную степенной функции $y = x^a$, $x > 0$, где a — произвольное число. В § 5.1 производная степенной функции была вычислена в случае, когда a — целое число. Тогда при $a \geqslant 0$ аргумент x мог быть любым, а при $a < 0$ — любым не равным нулю числом.

Имеем

$$y = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}.$$

Положим $u = a \ln x$. Тогда $y = e^u$ и, значит, согласно (5.4.5)

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = e^u \,\frac{a}{x} = e^{a \ln x}\,\frac{a}{x} = x^a\,\frac{a}{x} = ax^{a-1}. \tag{5.4.6}$$

Формула (5.4.6) для произвольных a имеет место при $x > 0$, а если $a \geqslant 1$, то она справедлива и при $x = 0$. Заметим, что для $0 < a < 1$ степенная функция $y = x^a$ имеет в нуле правую бесконечную производную.

Приведенное доказательство формулы (5.4.6) не зависит от того, является число a целым или нет. Но для случая, когда a — натуральное число, это доказательство не позволяет найти производную для отрицательных x в отличие от формулы (5.1.7), которая в этом случае имеет место для всех x.

2°. Найдем производную функции $y = \log_a |x|$, $x \neq 0$.

Чтобы воспользоваться формулой производной сложной функции, положим $u = |x|$. Тогда $y = \log_a u$.

Введем функцию, называемую $\operatorname{sign} x$ (от латинского *signum*) или знак x:

$$\operatorname{sign} x := \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Тогда $u = |x| = x \cdot \operatorname{sign} x$ и $|x|' = \operatorname{sign} x$ при $x \neq 0$. Поэтому согласно (5.4.5)

$$y'_x = y'_u\, u'_x = \frac{1}{u \ln a}\, \operatorname{sign} x = \frac{\operatorname{sign} x}{|x|} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Таким образом,

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \neq 0. \tag{5.4.7}$$

В частности,

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0. \tag{5.4.8}$$

Разумеется, производную функции $\log_a |x|$ можно было найти, не прибегая к формуле производной сложной функции.

3°. Вычислим производные гиперболических синуса и косинуса:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x; \tag{5.4.9}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x. \tag{5.4.10}$$

Таким образом, найдены производные всех основных элементарных функций.

§ 5.5. Производные и дифференциалы высших порядков

Если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках из некоторой окрестности точки x_0, то можно поставить вопрос о существовании в этой точке производной функции $f'(x)$. Если $f'(x)$ имеет производную в точке x_0, то эту производную называют второй производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$.

Аналогично определяются третья производная и вообще производные любого порядка.

Производная $f^{(n)}$ порядка n функции $f(x)$ существует в точке x_0, если в некоторой окрестности этой точки существует производная порядка $n-1$ функции $f(x)$, т.е. существует $f^{(n-1)}(x)$, и функция $f^{(n-1)}(x)$ имеет производную в точке x_0. Эту производную обозначают $f^{(n)}(x_0)$ и называют производной порядка n функции $f(x)$ в точке x_0.

Основные элементарные функции имеют производные любого порядка в своей естественной области определения. Например,

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n;$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(x^a)^{(n)} = a(a-1)\dots(a-n+1)x^{a-n}.$$

В связи с формулой для производной степенной функции отметим, что если число $a > 0$ не целое, то функция x^a в нуле имеет производные до порядка $[a]$ включительно, но не имеет производных более высокого порядка.

Если функция имеет в точке или на некотором промежутке производные всех порядков, то эту функцию называют бесконечно дифференцируемой соответственно в точке или на промежутке.

Функция может иметь производную первого порядка, но не иметь производной второго порядка. Например, если $y = x|x|$, то $y' = 2|x|$ и, значит, эта функция не имеет в нуле производной второго порядка.

Точно также можно указать функции, имеющие производную порядка $n > 1$, но не имеющие производной порядка $n + 1$.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в некоторой точке производные порядка n, то ясно, что сумма и разность этих функций также имеют в этой точке производные порядка n и выполняются равенства

$$(u(x) \pm v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x).$$

В этом легко убедиться по индукции.

Рассуждения по индукции показывают также, что при этих условиях существует производная порядка n произведения $u(x)v(x)$.

Сейчас нас будет интересовать выражение производных высших порядков от произведения функций через производные самих этих функций.

Здесь потребуются величины

$$C_n^k := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n; \qquad 0! := 1, \tag{5.5.1}$$

которые называют биномиальными коэффициентами, так как эти числа участвуют в формуле бинома Ньютона, но об этом будет говориться позднее.

Число C_n^k называют числом сочетаний из n по k, так как оно показывает, сколько различных подмножеств, состоящих из k элементов, имеет множество из n элементов. Но это свойство сейчас не будет нужно.

Теорема 5.5.1 (Формула Лейбница). *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x_0 производные порядка n, то в этой точке существует производная порядка n произведения $u(x)\,v(x)$ и справедливо равенство*

$$(u(x_0)\,v(x_0))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k)}(x_0)\, v^{(n-k)}(x_0), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{5.5.2}$$

где по определению считают, что производная нулевого порядка равна самой функции.

Доказательство. Для сокращения записи не будем писать аргументы у производных.

Докажем формулу Лейбница по индукции. При $n = 1$ формула (5.5.2) имеет вид

$$(u\,v)' = \sum_{k=0}^{1} C_1^k\, u^{(k)}\, v^{(1-k)} = u\,v' + u'\,v,$$

т.е. это формула для первой производной произведения двух функций.

Предположим теперь, что равенство (5.5.2) доказано для показателя $n = m$ и установим его справедливость при $n = m + 1$.

Имеем

$$(u\,v)^{(m+1)} = ((u\,v)^{(m)})' = \left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)}\, v^{(m-k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \big(u^{(k)}\, v^{(m-k)}\big)' = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \big(u^{(k+1)} v^{(m-k)} + u^{(k)}\, v^{(m+1-k)}\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} C_m^{i-1} u^{(i)}\, v^{(m-(i-1))} + \sum_{i=0}^{m} C_m^i u^{(i)}\, v^{(m+1-i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (C_m^{i-1} + C_m^i) u^{(i)}\, v^{(m+1-i)} + C_m^m u^{(m+1)}\, v^{(0)} + C_m^0 u^{(0)}\, v^{(m+1)}.$$

Но согласно (5.5.1)

$$C_m^{i-1} + C_m^i = \frac{m!}{(i-1)!\,(m-(i-1))!} + \frac{m!}{i!\,(m-i)!} =$$

$$= \frac{m!}{i!\,(m-i+1)!}(i + m - i + 1) = \frac{(m+1)!}{i!(m-i+1)!} = C_{m+1}^i.$$

Кроме того,

$$C_m^m = 1 = C_{m+1}^{m+1}, \qquad C_m^0 = 1 = C_{m+1}^0.$$

Поэтому

$$(u\,v)^{(m+1)} = C_{m+1}^0 u^{(0)}\, v^{(m+1)} + \sum_{i=1}^{m} C_{m+1}^i u^{(i)}\, v^{(m+1-i)} +$$

$$+C_{m+1}^{m+1} u^{(m+1)}\, v^{(0)} = \sum_{i=0}^{m+1} C_{m+1}^{i} u^{(i)}\, v^{(m+1-i)}$$

и мы получили формулу (5.5.2) для $n = m + 1$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь дифференциалы высших порядков.

Пусть x — независимая переменная и функция $y = f(x)$ дифференцируема. Тогда $dy = f'(x)dx$ и, значит, дифференциал dy зависит от x и от dx.

Поставим вопрос, является ли дифференциал dy как функция от x дифференцируемой функцией.

Чтобы выяснить это, вновь придадим аргументу x приращение dx и рассмотрим приращение дифференциала dy

$$f'(x + dx)dx - f'(x)\, dx = \big(f'(x + dx) - f'(x)\big)\, dx. \tag{5.5.3}$$

Если существует вторая производная $f''(x)$, то разность (5.5.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\big(f'(x + dx) - f'(x)\big)dx = \big(f''(x)dx + o(dx)\big)dx =\\ = f''(x)(dx)^2 + o\big((dx)^2\big), \quad dx \to 0.\end{aligned}$$

Квадрат дифференциала независимой переменной $(dx)^2$ принято обозначать dx^2. В такой записи dx считается единым символом, который возводится в квадрат.

Таким образом, полагая по определению $d^2y := d(dy)$, получаем

$$d^2y = f''(x)dx^2. \tag{5.5.4}$$

Так как дифференцируемость функции равносильна существованию производной, то существование второго дифференциала d^2y равносильно существованию второй производной $f''(x)$.

Поскольку дифференциал независимой переменной dx от x не зависит, то $d^2x = d(dx) = 0$.

Для $n > 2$ аналогично полагаем

$$d^ny := d(d^{n-1}y)$$

и находим

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n, \tag{5.5.5}$$

где dx^n обозначает n-ую степень дифференциала dx.

Отсюда следует, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{5.5.6}$$

Напомним, что формулы (5.5.4) и (5.5.5) выведены в предположении, что x является независимой переменной.

Рассмотрим дифференциалы сложной функции.

Сначала найдем выражение для дифференциала первого порядка сложной функции. Пусть задана сложная функция $y = \psi(x) = \varphi(f(x))$, где функции $y = \varphi(u)$ и $u = f(x)$ имеют производные первого порядка. Тогда $dy = \psi'(x)\,dx$ и в силу равенства (5.4.1) $\psi'(x) = \varphi'(u)f'(x)$.

Поэтому

$$dy = \varphi'(u)f'(x)\,dx.$$

С другой стороны, $du = f'(x)\,dx$ и, значит, $dy = \varphi'(u)\,du$.

Таким образом, для дифференциала dy справедливы формулы

$$dy = \psi'(x)\,dx \tag{5.5.7}$$

и

$$dy = \varphi'(u)\,du. \tag{5.5.8}$$

Эти формулы выглядят одинаково, но их принципиальная разница состоит в том, что в (5.5.7) dx является дифференциалом независимой переменной, а в (5.5.8) du является дифференциалом зависимой переменной.

Свойство первого дифференциала иметь одинаковое выраженние через дифференциалы независимой и зависимой переменой называют инвариантностью формы первого дифференциала.

Дифференциалы высших порядков подобной инвариантностью не обладают.

Пусть по-прежнему $y = \varphi(u)$, $u = f(x)$, где x — независимая переменная.

Согласно (5.5.8) и (5.2.6)

$$\begin{aligned} d^2y &= d(\varphi'(u)\,du) = d(\varphi'(u))\,du + \varphi'(u)\,d(du) = \\ &= \varphi''(u)\,du\,du + \varphi'(u)\,d^2u = \varphi''(u)\,du^2 + \varphi'(u)\,d^2u. \end{aligned}$$

Итак,

$$d^2y = \varphi''(u)\,du^2 + \varphi'(u)\,d^2u. \tag{5.5.9}$$

Здесь d^2u может не равняться нулю, так как u — зависимая переменная и $d^2u = f''(x)\,dx^2$.

Сравнение формул (5.5.9) и (5.5.4) показывает, что второй дифференциал не обладает свойством инвариантности — его выражение зависит от того, записывается ли он через дифференциалы независимой переменной или через дифференциалы зависимой переменной.

Найдем еще выражение третьего дифференциала функции через дифференциалы зависимой переменной. Имеем

$$\begin{gathered} d^3y = d(d^2y) = d(\varphi''(u)\,du^2 + \varphi'(u)\,d^2u) = \\ = \varphi'''(u)\,du^3 + \varphi''(u)\,d(du^2) + \varphi''(u)\,du\,d^2u + \varphi'(u)\,d(d^2u) = \\ = \varphi'''(u)\,du^3 + 3\varphi''(u)\,d^2u\,du + \varphi'(u)\,d^3u. \end{gathered} \tag{5.5.10}$$

Формулы (5.5.9) и (5.5.10) запоминать не нужно. Каждый раз, когда они нужны, рекомендуется выводить их заново.

Рассмотрим, наконец, вопрос о производных функций, заданных параметрически. Сначала поясним, как понимается параметрическое задание функций.

Пусть в некоторой окрестности точки t_0 заданы функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$, причем функция $x(t)$ строго монотонна и непрерывна в этой окрестности. Тогда в окрестности точки $x_0 := x(t_0)$ существует обратная строго монотонная непрерывная функция $t = t(x)$. Это позволяет ввести сложную функцию $y = y(t(x))$, которую и имеют в виду, когда говорят о функции $y = y(x)$, заданной параметрически формулами $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Будем теперь дополнительно считать, что в точке t_0 существуют производные x'_t, y'_t и $x'_t(t_0) \neq 0$. Покажем, что в этом случае можно вычислить производную y'_x в точке x_0, не находя явно функцию $t = t(x)$.

Имеем

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Если функция y'_t/x'_t имеет производную (так будет во всяком случае, когда существуют вторые производные $x''_{tt}(t)$ и $y''_{tt}(t)$), то вторую производную y''_{xx} можно найти по формуле

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot t'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t}.$$

Подобным образом можно находить производные функции $y(x)$ более высокого порядка, если они существуют.

Глава 6

СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

§ 6.1. Возрастание и убывание функции в точке

Наряду с возрастанием и убыванием функций на промежутке рассматривается возрастание и убывание функции в точке.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0. Говорят, что f *строго возрастает в точке* x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для x из этой окрестности, лежащих слева от x_0, справедливо неравенство $f(x) < f(x_0)$, а для x, лежащих справа от x_0, — неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Если в этих неравенствах знаки $<$ и $>$ заменены соответственно на $\leqslant$ и $\geqslant$, то говорят, что функция f *возрастает* (точнее, *не убывает*) в точке x_0.

Аналогично определяются строгое убывание и убывание функции в точке. Можно говорить также об одностороннем возрастании и убывании в точке.

Основными являются случаи строгого возрастания и убывания функции в точке, а нестрогое возрастание и убывание рассматривают реже.

Теорема 6.1.1. *Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную. Тогда в точке x_0 функция f строго возрастает, если $f'(x_0) > 0$, и строго убывает, если $f'(x_0) < 0$.*

Доказательство. Пусть $f'(x_0) > 0$. Так как

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то для достаточно малых Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0.$$

Значит, если $\Delta x > 0$, то $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x) > 0$, а если $\Delta x < 0$, то $\Delta y < 0$. А это означает строгое возрастание функции f в точке x_0.

Аналогично рассматривается случай, когда $f'(x_0) < 0$.

В теореме 6.1.1 можно иметь в виду односторонние производные, но тогда в утверждении нужно говорить об одностороннем строгом возрастании или строгом убывании функции.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум*, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. А если для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *строгий локальный максимум*.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный минимум*, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$. А если для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *строгий локальный минимум*.

Точки локального максимума и минимума функции называют точками ее локального экстремума, а точки строгого локального максимума и минимума — точками строгого локального экстремума.

В этих определениях слово "локальный" добавляют потому, что число $f(x_0)$ сравнивается со значениями функции только в достаточно малой окрестности точки x_0 в отличие от "глобального" максимума и минимума, которые относятся ко всей области задания функции.

Теорема 6.1.2 (Теорема Ферма). *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то для того чтобы в точке x_0 функция f имела локальный экстремум, необходимо выполнение равенства $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Из неравенства $f'(x_0) > 0$ следует строгое возрастание функции f в точке x_0, а из неравенства $f'(x_0) < 0$ — строгое убывание f в точке x_0. Значит, локальный экстремум возможен только при условии $f'(x_0) = 0$.

Условие $f'(x_0) = 0$, будучи необходимым для локального экстемума, не является достаточным. Действительно, функция $y = x^3$ строго возрастает на всей оси. Вместе с тем, ее производная $y' = 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.

Теорема 6.1.3 (Теорема Дарбу о промежуточных значениях). *Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ и существует функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда для любого числа α, заключенного строго между $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f(\xi) = \alpha$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда числа $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки и α равно нулю.

Пусть для определенности $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$.

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и, значит, принимает в некоторой точке $\xi \in [a, b]$ свое максимальное значение. Так как $F'(a) = f(a) > 0$, то в точке a функция F сторго возрастает, поэтому ξ не может быть точкой a. Точно также ξ не может равняться b, так как из условия $F'(b) = f(b) < 0$ следует, что F строго убывает в точке b.

Следовательно, ξ — внутренняя точка отрезка $[a, b]$ и тогда по теореме Ферма $F'(\xi) = 0$. Но $F'(\xi) = f(\xi)$ и, таким образом, $f(\xi) = 0$.

Если выполняются условия $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$, то в качестве ξ можно взять точку, в которой $F(x)$ принимает минимальное значение на отрезке $[a, b]$, и аналогичным образом доказать, что $f(\xi) = 0$.

Таким образом, в рассматриваемом частном случае теорема доказана.

Переход к общему случаю осуществляется так же, как при доказательстве теоремы Коши 4.3.3 о промежуточных значениях. Вводим функцию $\varphi(x) := f(x) - \alpha$. Так как число α заключено строго между $f(a)$ и $f(b)$, то функция $\varphi(x)$ принимает в точках a и b значения разных знаков. Кроме того, если положить $\Phi(x) := F(x) - \alpha x$, то $\Phi'(x) = (F(x) - \alpha x)' = \varphi(x)$. Поэтому в силу уже доказанного частного случая теоремы существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $\varphi(\xi) = 0$. Отсюда $f(\xi) - \alpha = 0$ и, значит, $f(\xi) = \alpha$.

Теорема доказана.

Сравним теоремы Дарбу и Коши о промежуточных значениях. Заключение в обеих теоремах одинаковы, разными являются условия на функцию f. В теореме Коши требовалась непрерывность функции $f(x)$, а в теореме Дарбу предполагается существование функции $F(x)$ такой, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.

Но производная может существовать в каждой точке и не быть непрерывной. Это видно на примере функции

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

для которой

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

и $F'(x)$ имеет разрыв в точке 0.

Поэтому теорема Дарбу не следует из теоремы Коши. На самом деле теорема Коши является следствием теоремы Дарбу, так как для каждой непрерывной функции f существует функция F такая, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Это будет доказано в главе 9.

§ 6.2. Теоремы о среднем

В этом параграфе рассматриваются функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемые, т.е. имеющие производную, на интервале (a, b).

Теорема 6.2.1 (Теорема Ролля). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Если $f(a) = f(b)$, то существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.*

Доказательство. Так как функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то в некоторых точках она принимает свои максимальное M и минимальное m значения на этом отрезке. Если $M = m$, то f — имеет это значение во всех точках из $[a, b]$ и производная $f'(x)$ равна нулю всюду на (a, b).

Если же $M \neq m$, то по крайней мере одно из этих значений функция f принимает во внутренней точке отрезка $[a, b]$. Тогда по теореме Ферма в этой точке производная f' равна нулю и теорема доказана.

Теорема Ролля показывает, что в некоторой точке интервала (a, b) касательная к графику функции параллельна оси OX.

Теорема 6.2.2 (Теорема Лагранжа о среднем). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{6.2.1}$$

Доказательство. Сведем задачу к теореме Ролля. Для этого выберем число λ так, чтобы для функции $\varphi(x) := f(x) - \lambda x$ выполнялось равенство $\varphi(a) = \varphi(b)$. Решив уравнение $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$, видим, что это условие выполняется при

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). По теореме Ролля существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$\varphi'(\xi) = 0.$$

Это равенство означает, что $f'(\xi) - \lambda = 0$ и, таким образом,

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Теорема доказана.

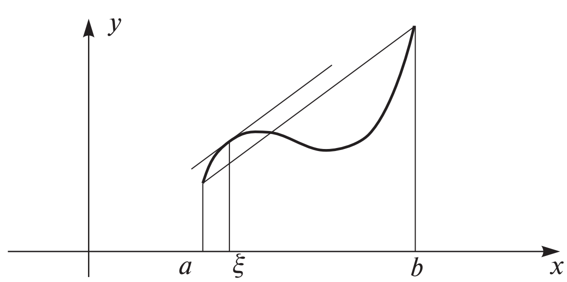
Формулу (6.2.1) называют *формулой конечных приращений Лагранжа.* Она является одним из основных результатов дифференциального исчисления.

Чтобы выяснить геометрический смысл формулы конечных приращений Лагранжа, запишем ее в виде

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{6.2.2}$$

Левая часть равенства (6.2.2) равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке ξ, а правая часть — тангенсу угла наклона прямой, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика функции.

Таким образом, теорема Лагранжа показывает, что существует точка $\xi \in (a, b)$, касательная в которой параллельна прямой, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика функции.



Другая форма записи формулы конечных приращений Лагранжа такова:

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a), \tag{6.2.3}$$

где θ — некоторое число, удовлетворяющее условию $0 < \theta < 1$.

В формулировке теоремы 6.2.2 предполагается, что $a < b$. Но легко видеть, что формула (6.2.1) имеет место и в том случае, когда $a > b$.

Теорема 6.2.3 (Теорема Коши о среднем). *Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, причем $g(a) \neq g(b)$. Предположим, что f и g дифференцируемы на интервале (a, b) и производные $f'(x)$ и $g'(x)$ не обращаются на (a, b) в нуль одновременно. Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{6.2.4}$$

Доказательство. Для $g(x) = x$ теорема 6.2.3 совпадает с теоремой 6.2.2. Доказательство теоремы 6.2.3 будет идти по той же схеме.

Введем функцию $\varphi(x) := f(x) - \lambda g(x)$. Она непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Чтобы к функции $\varphi(x)$ можно было применить теорему Ролля, составим уравнение $f(b) - \lambda g(b) = f(a) - \lambda g(a)$, решив которое, получим

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Для этого λ имеем $\varphi(a) = \varphi(b)$. Поэтому существует точка $\xi \in (a, b)$, для которой $\varphi'(\xi) = 0$. Отсюда

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi) = 0. \tag{6.2.5}$$

При этом $g'(\xi) \neq 0$, так как иначе из (6.2.5) следовало бы, что и $f'(\xi) = 0$, а производные функций f и g не могут обращаться в нуль одновременно.

Таким образом, левую и правую части равенства (6.2.5) можно разделить на $g'(\xi)$, что приводит к (6.2.4).

Теорема доказана.

Получим некоторые следствия из теоремы Лагранжа о среднем.

Теорема 6.2.4. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f'(x) = 0$ во всех точках интервала (a, b). Тогда функция f постоянна на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Для любой пары точек x^* и x^{**} из отрезка $[a, b]$ по формуле конечных приращений Лагранжа существует такая точка $\xi \in (x^*, x^{**})$, расположенная между x^* и x^{**}, что

$$f(x^*) - f(x^{**}) = f'(\xi)(x^* - x^{**}).$$

Но так как ξ принадлежит интервалу (a, b), то $f'(\xi) = 0$ и, значит, $f(x^*) = f(x^{**})$. Теорема доказана, так как точки x^* и x^{**} были произвольными точками отрезка $[a, b]$.

Покажем, что условия этой теоремы можно несколько ослабить.

Теорема 6.2.5. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f'(x) = 0$ во всех точках интервала (a, b) за исключением конечного числа точек, в которых существование производной не предполагается. Тогда функция f постоянна на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ — те точки, из отрезка $[a, b]$, в которых производная $f'(x)$ может не существовать.

Применив теорему 6.2.4 к отрезкам $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, видим, что функция $f(x)$ постоянна на каждом таком отрезке. Так как все точки x_k, $k = 1, \ldots, n-1$, принадлежат интервалу (a, b) и являются концевыми точками двух отрезков постоянства непрерывной функции $f(x)$, то f постоянна на всем отрезке $[a, b]$.

С помощью сходных рассуждений устанавливается следующее утверждение.

Теорема 6.2.6. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в каждой точке этого отрезка, за исключением не более чем конечного множества точек, имеет производную, удовлетворяющую условию*

$$|f'(x)| \leqslant M. \tag{6.2.6}$$

Тогда для любых точек x^*, x^{**}, принадлежащих отрезку $[a, b]$, справедлива оценка

$$|f(x^*) - f(x^{**})| \leqslant M|x^* - x^{**}|. \tag{6.2.7}$$

Доказательство. Пусть $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ — те точки из $[a, b]$, в которых существование производной не предполагается.

Для любых точек x^*, x^{**}, принадлежащих отрезку $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа, находим, что при некотором $\xi \in (x^*, x^{**})$

$$|f(x^*) - f(x^{**})| = |f'(\xi)|\,|x^* - x^{**}| \leqslant M\,|x^* - x^{**}|.$$

Пусть теперь $x^* \in [x_{i-1}, x_i]$ и $x^{**} \in [x_{j-1}, x_j]$, где $i < j$. Тогда

$$|f(x^*) - f(x^{**})| \leqslant |f(x^*) - f(x_i)| + \\ + \sum_{k=i+1}^{j-1} |f(x_{k-1}) - f(x_k)| + |f(x_{j-1}) - f(x^{**})|,$$

поэтому

$$|f(x^*) - f(x^{**})| \leqslant M|x^* - x_i| + \\ +M \sum_{k=i+1}^{j-1} |x_{k-1} - x_k| + M|x_{j-1} - x^{**}| = M|x^* - x^{**}|.$$

Теорема доказана.

Функции, удовлетворяющие условию вида (6.2.7), часто встречаются в разных вопросах, что дает повод для введения следующего понятия.

Определение. Функция $f(x)$ удовлетворяет на промежутке *условию Липшица порядка* $\alpha > 0$, если существует такое число M, что для любой пары точек x^*, x^{**} из этого промежутка, справедлива оценка

$$|f(x^*) - f(x^{**})| \leqslant M|x^* - x^{**}|^{\alpha}. \tag{6.2.8}$$

В терминах модуля непрерывности условие Липшица записывается так:

$$\omega(f, \delta) \leqslant M\delta^{\alpha}.$$

Покажем, что функции, удовлетворяющие условию Липшица порядка $\alpha > 1$, являются константами.

В самом деле, из (6.2.8) следует, что

$$\left|\frac{f(x^*) - f(x^{**})}{x^* - x^{**}}\right| \leqslant \frac{M|x^* - x^{**}|^{\alpha}}{|x^* - x^{**}|} = M|x^* - x^{**}|^{\alpha-1}, \tag{6.2.9}$$

а так как $\alpha - 1 > 0$, то из (6.2.9) при $x^{**} \to x^*$ получаем $f'(x^*) = 0$, что в силу теоремы 6.2.4 доказывает наше утверждение.

Поэтому условие Липшица рассматривают только при $0 < \alpha \leqslant 1$.

Покажем, что для дифференцируемых функций вопрос об их монотонности на промежутке решается в терминах знака производной.

Теорема 6.2.7. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда*

1). *условие $f'(x) \geqslant 0$ на (a, b) необходимо и достаточно, для того чтобы функция f возрастала на $[a, b]$;*

2). *условие $f'(x) > 0$ на (a, b) достаточно для строгого возрастания f на $[a, b]$.*

Доказательство. 1). Если функция $y = f(x)$ возрастает на $[a, b]$, то давая в произвольной точке $x \in (a, b)$ приращение Δx, видим, что из $\Delta x > 0$ следует $\Delta y \geqslant 0$, а из $\Delta x < 0$ следует $\Delta y \leqslant 0$. Поэтому всегда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Значит, предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

который по условию существует, не может быть отрицательным.

Наоборот, если $f'(x) \geqslant 0$ на интервале (a, b), то для любой пары точек x_1 и x_2, принадлежащих отрезку $[a, b]$, из $x_1 < x_2$ с помощью формулы конечных приращений Лагранжа получаем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant 0,$$

т.е. $f(x_2) \geqslant f(x_1)$.

2). Если $f'(x) > 0$ на (a, b), то для проивольных точек x_1 и x_2 из $[a, b]$ таких, что $x_1 < x_2$, имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0,$$

откуда $f(x_2) > f(x_1)$.

Теорема доказана.

Заметим, что условие $f'(x) > 0$, будучи достаточным для строгого возрастания функции f, не является необходимым. Это видно на примере функции $f(x) = x^3$, которая строго возрастает, но $f'(0) = 0$.

Из теоремы 6.2.7 вытекают следующие утверждения о функциях, монотонных на интервале, который может быть конечным или бесконечным.

С л е д с т в и е 6.2.8. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда*

1). *условие $f'(x) \geqslant 0$ на (a, b) необходимо и достаточно, для того чтобы функция f возрастала на (a, b);*

2). *условие $f'(x) > 0$ на (a, b) достаточно для строгого возрастания f на (a, b).*

Доказательство. Для любой пары точек x_1, x_2 таких, что $a < x_1 < x_2 < b$, след функции f на отрезке $[x_1, x_2]$ удовлетворяет условиям теоремы 6.2.7. Значит, из неравенства $f'(x) \geqslant 0$ на $[x_1, x_2]$ следует, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, а из $f'(x) > 0$ на $[x_1, x_2]$ следует $f(x_1) < f(x_2)$.

Каждую точку $x \in (a, b)$ можно поместить в отрезок $[x_1, x_2] \subset (a, b)$, для которого точка x является внутренней, и, сославшись на теорему 6.2.7, из возрастания f на $[x_1, x_2]$ вывести, что $f'(x) \geqslant 0$.

Понятно, что утверждения, аналогичные теореме 6.2.7 и следствию 6.2.8, имеют место и для убывающих функций.

Теорема 6.2.9. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Если $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$, то f строго монотонна на $[a, b]$.*

Доказательство. В силу теоремы Дарбу 6.1.3 о промежуточных значениях, если бы производная $f'(x)$ принимала в некоторых точках интервала (a, b) значения разных знаков, то она обращалась бы в нуль в некоторой точке из (a, b), что по условию невозможно.

Значит, всюду на (a, b) либо $f'(x) > 0$, либо $f'(x) < 0$. А тогда согласно теореме 6.2.7 функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ или строго возрастает, или строго убывает.

Теорема доказана.

Теорема 6.2.10. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_0 + \delta]$, $\delta > 0$, и дифференцируема на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$. Если существует конечный или бесконечный предел $f'(x_0 + 0)$, то функция f имеет в точке x_0 правую производную, соответственно конечную или бесконечную, и*

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0).$$

Доказательство. Согласно формуле конечных приращений Лагранжа для достаточно малых положительных h имеем

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1. \tag{6.2.10}$$

По условию при $h \to +0$ в правой части равенства (6.2.10) получаем предел $f'(x_0 + 0)$. Значит, существует равный ему предел выражения из левой части (6.2.10).

Теорема доказана.

Точно также, если f непрерывна в точке x_0 слева и существует конечный или бесконечный предел $f'(x_0 - 0)$, то существет равная этому пределу левая производная функции f в точке x_0.

Из теоремы 6.2.10 следует, что если производная функции существует в каждой точке некоторого интервала, то эта производная не может иметь точек разрыва первого рода.

Кроме того, если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0 и существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, то f дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

§ 6.3. Раскрытие неопределенностей

Мы уже встречались с задачей о пределах вида

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{6.3.1}$$

когда $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. В этом случае нельзя переходить к пределу отдельно в числителе и в знаменателе. Так было, например, когда искали предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$, то предел дроби (6.3.1) бесконечен. Поэтому интересен случай, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Говорят, что предел (6.3.1) является неопределенностью вида $0/0$, если пределы числителя и знаменателя этой дроби равны нулю, а нахождение пределов подобного типа называют раскрытием неопределенностей.

Теорема 6.3.1. *Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливы равенства $f(a) = g(a) = 0$ и существуют производные $f'(a)$ и $g'(a)$, причем $g'(a) \neq 0$. Тогда предел* (6.3.1) *существует и*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \tag{6.3.2}$$

Доказательство. Заметим, что в силу условия $g'(a) \neq 0$ функция $g(x)$ строго монотонна в точке a и, так как $g(a) = 0$, то в некоторой проколотой окрестности точки a функция $g(x)$ не обращается в нуль. Значит, в этой окрестности дробь $f(x)/g(x)$ имеет смысл.

Для $x \neq a$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} : \frac{g(x) - g(a)}{x - a}. \tag{6.3.3}$$

В последнем выражении обе дроби имеют пределы при $x \to a$, причем предел делителя, равный $g'(a)$, отличен от нуля. Поэтому, переходя к пределу при $x \to a$ в дроби из правой части (6.3.3) отдельно в числителе и в знаменателе, получаем равенство (6.3.2).

Теорема доказана.

Здесь можно было иметь в виду односторонние производные функций f и g и соответствующий односторонний предел в (6.3.2).

Теорема 6.3.2 (Правило Лопиталя для неопределенности $0/0$). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в некоторой проколотой окрестности точки a, причем $g'(x)$ не обращается в этой окрестности в нуль, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Если существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{6.3.4}$$

то существует предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \tag{6.3.5}$$

и значения этих пределов равны, т.е. справедливо равенство

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. В роли "точки a" здесь могут выступать как числа, так и бесконечные символы $+\infty$ и $-\infty$. Будем сначала считать a конечным.

Доопределим (или переопределим) функции f и g в точке a, положив $f(a)=g(a)=0$. Тогда эти функции будут непрерывными в некоторой окрестности точки a.

Имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}.$$

Для дроби в правой части этого равенства выполняются условия теоремы Коши о среднем. Значит, при некотором $\theta\in(0,1)$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a+\theta(x-a))}{g'(a+\theta(x-a))}. \tag{6.3.6}$$

Так как в силу условий теоремы предел дроби, стоящей в (6.3.6) справа, существует, то из (6.3.6) следует утверждение теоремы для конечных a.

Заметим, что в этом случае можно иметь в виду односторонние производные и односторонние пределы.

Рассмотрим теперь случай, когда a — бесконечный символ. Пусть, например, $a=+\infty$. Сделаем замену $x=1/t$ и введем функции $\varphi(t):=f(1/t)$ и $\psi(t):=g(1/t)$.

Для достаточно малых положительных t функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы, причем

$$\psi'(t)=g'(1/t)\Big(-\frac{1}{t^2}\Big)\neq 0.$$

Далее, $\varphi(t)\to 0$, $\psi(t)\to 0$ при $t\to +0$ и

$$\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=f'(1/t)\Big(-\frac{1}{t^2}\Big)\Big/\,g'(1/t)\Big(-\frac{1}{t^2}\Big)=f'(1/t)\Big/\,g'(1/t).$$

Поэтому существует предел

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Значит, по уже доказанному имеем

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=\lim_{t\to+0}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

и осталось только заметить, что

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Теорема доказана.

Покажем, что существование предела (6.3.4), будучи достаточным для существования предела (6.3.5), не является необходимым. Действительно, пусть $f(x)=x^2\sin 1/x$ и $g(x)=x$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Но при $x\to 0$ предел дроби

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

не существует.

Теорема 6.3.3 (Правило Лопиталя для неопределенности ∞/∞). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в некоторой односторонней проколотой окрестности точки a, причем $g'(x)$ не обращается в этой окрестности в нуль, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. Если существует конечный или равный бесконечности определенного знака предел*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},\tag{6.3.7}$$

то существует предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

и значения этих пределов равны, т.е. справедливо равенство

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. В этой теореме a может быть как конечным, так и бесконечным символом $+\infty$ или $-\infty$. Пределы понимаются как соответствующие односторонние пределы.

Для определенности проведем рассуждения в случае, когда a — число и $x\to a+0$. Изменения, которые нужно произвести, если a — бесконечный символ, очевидны.

Будем считать, что мы находимся в столь малой проколотой правой окрестности точки a, в которой g и g' не обращаются в нуль и производная f' существует. В этой окрестности функция g строго монотонна.

Введем обозначение

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$$

и рассмотрим сначала случай, когда предел K конечен.

Берем произвольное $\varepsilon>0$ и находим число $x_0>a$ такое, что для всех $x\in(a,x_0)$ выполняется оценка

$$\Bigl|\frac{f'(x)}{g'(x)}-K\Bigr|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.3.8}$$

Для каждого $x\in(a,x_0)$ по теореме Коши о среднем существует точка $\xi\in(x,x_0)$ такая, что

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Так как в точке ξ справедлива оценка (6.3.8), то

$$\Bigl|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-K\Bigr|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.3.9}$$

В силу строгой монотонности функции g имеем

$$0<\frac{g(x_0)}{g(x)}<1,$$

откуда

$$0<\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}<1. \tag{6.3.10}$$

Умножим обе части неравенства (6.3.9) на дробь

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)}.$$

Тогда, пользуясь оценками (6.3.10), получим

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x)} - K\left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| = \left|\frac{f(x){-}f(x_0)}{g(x)} - K\left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right) + \frac{f(x_0)}{g(x)} - K\,\frac{g(x_0)}{g(x)}\right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right| + \left|K\,\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|.$$

Пользуясь теперь тем, что $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$, находим $\delta > 0$ такое, что $a + \delta < x_0$ и для всех $x \in (a, a+\delta)$ выполняется оценка

$$\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right| + \left|K\,\frac{g(x_0)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для всех $x \in (a, a+\delta)$ имеем

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon,$$

а это показывает, что

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Таким образом, для случая конечного предела K теорема доказана.

Пусть теперь K бесконечно, для определенности $K = +\infty$. Тогда в достаточно малой правой окрестности точки a производная $f'(x)$ сохраняет знак. Значит, в этой окрестности функция f строго монотонна.

Итак, существует такая правая окрестность точки a, что в ней обе функции f и g дифференцируемы, не имеют нулей и строго монотонны. В дальнейшем будем иметь в виду только эту окрестность.

Из условия

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$$

следует, что для каждого числа L существует точка x_0 такая, что для всех x из (a, x_0) выполняется оценка

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > L.$$

Запишем для $x \in (a, x_0)$ тождество

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right) \left(1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}\right)^{-1}. \tag{6.3.11}$$

По теореме Коши о среднем существует точка $\xi \in (x, x_0)$ такая, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Значит, для всех $x \in (a, x_0)$ имеем

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} > L. \tag{6.3.12}$$

Поскольку функции f и g строго монотонны и их пределы бесконечны, то существует такая правая окрестность точки a, что для всех $x \in (a, x_0)$ из этой окрестности справедливо неравенство

$$\left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right) \left(1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}\right)^{-1} > \frac{1}{2}. \tag{6.3.13}$$

Из (6.3.11)–(6.3.13) вытекает, что для всех x из указанной окрестности

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2} L.$$

Отсюда

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Теперь теорема полностью доказана.

Заметим, что если в теореме 6.3.3 предел (6.3.7) бесконечен, то он обязательно равен или $+\infty$ или $-\infty$.

В самом деле, если предел (6.3.7) бесконечен, то $f'(x)$ не может иметь нулей в соответствующей малой окрестности точки a. Отсюда в силу теоремы 6.2.9 видим, что f строго монотонна в указанной окрестности. Значит, $f'(x)$ имеет в ней определенный знак. Таким образом, и f' и g' имеют каждая свой знак и бесконечный предел равен $+\infty$ или $-\infty$.

Это замечание относится и к односторонним бесконечным пределам в теореме 6.3.2.

Рассмотрим неопределенности других типов. Они возникают, когда при формальном переходе к пределу получаются выражения вида

$$0 \cdot \infty, \quad +\infty - (+\infty), \quad (+0)^0, \quad (+\infty)^0, \quad 1^\infty.$$

Покажем, как каждый из этих случаев можно свести, например, к неопределенности вида $0/0$.

Пусть $\lim f(x) = 0$ и $\lim g(x) = \infty$. Тогда вместо предела

$$\lim f(x)g(x)$$

можно рассматривать предел

$$\lim \frac{f(x)}{1/g(x)},$$

который является неопределенностью вида $0/0$.

Если $\lim f(x) = +\infty$ и $\lim g(x) = +\infty$, то представим разность этих функций в виде произведения

$$f(x) - g(x) = \Big(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\Big) \cdot f(x)g(x),$$

а предел последнего выражения является неопределенностью вида $0 \cdot \infty$.

Неопределенности 0^0, ∞^0, 1^∞ обычно раскрывают, пользуясь представлением

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

(при естественном условии $f(x) > 0$). Тогда для неопределенностей вида $(+0)^0$, $(+\infty)^0$ выражение в показателе степени преобразуются в $0 \cdot \infty$, а для неопределенности 1^∞ — в $\infty \cdot 0$.

В качестве примера на применение правила Лопиталя построим бесконечно дифференцируемую функцию, которая имеет нуль только в одной точке, а все ее производные в этой точке равны нулю.

Покажем, что этим свойством обладает функция

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

При этом будет использоваться равенство

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^k} = 0, \tag{6.3.14}$$

где k — произвольное натуральное число. Чтобы установить (6.3.14), сделаем замену $1/x^2 = t$ и будем изучать получившееся выражение

$$\frac{e^{-1/x^2}}{x^k} = \frac{t^{k/2}}{e^t}$$

при $t \to +\infty$. С помощью правила Лопиталя легко убедиться, что

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{t^{k/2}}{e^t} = 0. \tag{6.3.15}$$

Действительно, при каждом дифференцировании знаменатель остается без изменений, а показатель степени в числителе уменьшается на единицу. Поэтому после достаточного числа дифференцирований числитель станет ограниченным и мы получим (6.3.15).

При $x \neq 0$ имеем

$$\varphi'(x) = \frac{2}{x^3}\, e^{-1/x^2},$$

а каждая следующая производная функции $\varphi(x)$ равна произведению e^{-1/x^2} на некоторую линейную комбинацию дробей вида $1/x^k$. Поэтому в силу (6.3.14) равенства $\varphi^{(m)}(0) = 0$ выполняются для всех $m = 1, 2, \ldots$ и наше утверждение доказано.

§ 6.4. Формула Тейлора

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке a производные до порядка m включительно. Требуется найти многочлен $Q(x)$ степени не выше m такой, что для всех $p = 0, 1, \ldots, m$ выполняются равенства

$$f^{(p)}(a) = Q^{(p)}(a).$$

Будем искать многочлен, $Q(x)$ в виде

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k (x-a)^k,$$

где коэффициенты α_k нужно определить.

Найдем производную многочлена $Q(x)$ порядка p, $p = 0, 1, \ldots, m$:

$$Q^{(p)}(x) = p!\alpha_p + (p+1)p \ldots 2\,(x-a) + (p+2)(p+1) \ldots 3\,(x-a)^2 + \ldots .$$

Отсюда

$$Q^{(p)}(a) = p!\alpha_p.$$

Значит, должны выполняться равенства

$$\alpha_p = \frac{Q^{(p)}(a)}{p!} = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}, \quad p = 0, 1, \ldots, m.$$

Таким образом, поставленную задачу решает многочлен

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{6.4.1}$$

Многочлен $Q(x)$, заданный формулой (6.4.1), называют многочленом Тейлора порядка m функции f в точке a.

Пусть функция f имеет в точке a производную порядка $n-1$. Составим разность функции f и ее многочлена Тейлора порядка $n-1$:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = R_n(x).$$

Равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \tag{6.4.2}$$

называют формулой Тейлора порядка $n-1$ функции f в точке a, функцию $R_n(x)$ — остаточным членом формулы Тейлора.

По построению многочлена Тейлора в точке a все производные функции $R_n(x)$ до порядка $n-1$ равны нулю.

Лемма 6.4.1. *Пусть функция f непрерывна на отрезке с концами в точках a и x, имеет во всех точках этого отрезка, за исключением, быть может, точки x, производную порядка $n-1$, $n \geqslant 1$, и $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора порядка $n-1$ функции f в точке a.*

Если $g(x) := (x-a)^n$, то существует такая точка x^*, расположенная между a и x, что

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n-1)}(x^*) - R_n^{(n-1)}(a)}{n!(x^*-a)}. \tag{6.4.3}$$

Доказательство. Так как $R_n(a) = 0$ и $g(a) = 0$, то

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(a)}{g(x) - g(a)}.$$

К полученной дроби применим теорему Коши о среднем, согласно которой существует точка x_1, лежащая между точками a и x, такая, что

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n'(x_1)}{g'(x_1)}.$$

Пользуясь тем, что $R_n'(a) = 0$ и $g'(a) = 0$, записываем

$$\frac{R_n'(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{R_n'(x_1) - R_n'(a)}{g'(x_1) - g'(a)}$$

и, вновь применив теорему Коши о среднем, находим точку x_2, лежащую между a и x_1, а, значит, между точками a и x, такую, что

$$\frac{R_n'(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{R_n''(x_2)}{g''(x_2)}.$$

Продолжаем этот процесс и находим точку x_{n-1} между точками a и x, для которой

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n-1)}(x_{n-1})}{g^{(n-1)}(x_{n-1})}.$$

Теперь, чтобы получить формулу (6.4.3), нужно учесть, что $g^{(n-1)}(x) = n!(x-a)$ и $R_n^{(n-1)}(a) = 0$, и положить $x^* = x_{n-1}$.

Лемма доказана.

Теорема 6.4.2 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть функция f непрерывна на отрезке с концами в точках a и x, имеет на интервале с концами в этих точках производную порядка n, $n \geqslant 1$, и непрерывную производную порядка $n-1$ в точке a (одностороннюю со стороны точки x). Тогда существует число θ, $0 < \theta < 1$, такое, что справедливо равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!}(x-a)^n, \qquad (6.4.4)$$

называемое формулой Тейлора порядка $n-1$ в точке a с остаточным членом в форме Лагранжа.

Доказательство. Пусть $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора (6.4.2) функции f, равный разности функции f и ее многочлена Тейлора порядка $n-1$.

Запишем формулу (6.4.3) и применим теорему Коши о среднем к дроби в правой части этой формулы. Тогда получим, что между a и x существует точка ξ такая, что

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Так как производная порядка n от многочлена порядка не выше $n-1$ равна нулю, то $R_n^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi)$. Поэтому, записав ξ в виде $a+\theta(x-a)$, где $0<\theta<1$, получим

$$R_n(x) = f^{(n)}(a+\theta(x-a))\,\frac{1}{n!}(x-a)^n,$$

а это равносильно (6.4.4).

Теорема доказана.

При $n=1$ формула (6.4.4) имеет вид

$$f(x) = f(a) + f'(a+\theta(x-a))\,(x-a),$$

т.е. это — формула конечных приращений Лагранжа.

Из теоремы 6.4.2 следует, что если для некоторого n справедливо тождество $f^{(n)}(x) \equiv 0$, то функция f является многочленом степени не выше $n-1$. При $n=1$ это утверждение составляло теорему 6.2.4.

Теорема 6.4.3 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке a производную порядка n, где $n \geqslant 1$. Тогда справедлива оценка*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right), \quad x \to a, \tag{6.4.5}$$

называемая формулой Тейлора порядка n в точке a с остаточным членом в форме Пеано.

Доказательство. Из существования производной $f^{(n)}(a)$ заключаем, что остаточный член R_n формулы Тейлора (6.4.2) имеет в точке a производную порядка n и справедливо равенство $R_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

Так как производная $f^{(n-1)}$ существует в некоторой окрестности точки a, то выполнены условия леммы 6.4.1. Поэтому можно воспользоваться равенством (6.4.3) и записать его правую часть в виде

$$\frac{1}{n!}R_n^{(n)}(a) + o\,(1) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a) + o\,(1), \quad x \to a.$$

Таким образом,

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = f^{(n)}(a)\frac{1}{n!} + o\,(1), \quad x \to a.$$

Умножив левую и правую части этой оценки на $g(x)$, приходим к (6.4.5).

Теорема доказана.

В теореме 6.4.3 производная может пониматься как односторонняя. Тогда оценка (6.4.5) имеет место для x из соответствующей односторонней окрестности точки a.

При $n = 1$ формула (6.4.5) принимает вид

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a), \quad x \to a,$$

равносильный представлению приращения функции через дифференциал.

Остаточный член в формуле Тейлора зависит от n и от $x - a$. Часто формулой Тейлора пользуются, когда n фиксировано и $x - a \to 0$ или когда x фиксировано, а $n \to \infty$.

§ 6.5. Формула Тейлора для элементарных функций

Запишем для элементарных функций их многочлены Тейлора и будем следить за поведением остоточного члена формулы Тейлора при фиксированном x и $n \to \infty$. При этом будем пользоваться представлением остаточного члена в форме Лагранжа.

Для простоты записи и по традиции будем рассматривать формулу Тейлора в нуле.

1°. *Показательная функция $f(x) = e^x$*

Так как $f^{(k)}(x) = e^x$, то $f^{(k)}(0) = 1$ для всех k. Значит,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{6.5.1}$$

где $0 < \theta < 1$.

Но для каждого x имеем $e^{\theta x} \leqslant e^{|x|}$. Поэтому для остаточного члена формулы Тейлора (6.5.1) справедлива оценка

$$\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|},$$

которая в силу (2.5.1) показывает, что для каждого x остаточный член формулы Тейлора стремится к нулю при $n \to \infty$.

При $x = 1$ из формулы (6.5.1) получаем

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}. \tag{6.5.2}$$

При $n = 2$ имеем

$$e = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\theta}}{3!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{e}{6}$$

и, значит, $e < 3$.

Таким образом, согласно (6.5.2) справедлива оценка

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}. \tag{6.5.3}$$

Дробь в правой части формулы (6.5.3) при $n \to \infty$ стремится к нулю достаточно быстро. Поэтому формула (6.5.2), в отличие от определения числа e, может быть использована для нахождения приближенного значения e.

С помощью (6.5.3) легко доказать иррациональность числа e.

Будем рассуждать от противного. Предположим, что e рационально и

$$e = \frac{m}{n}, \tag{6.5.4}$$

где $n \geqslant 2$, так как e заведомо не является натуральным числом.

Умножив двойное неравенство (6.5.3) на $n!$, получим

$$0 < n!\,e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} < \frac{3}{n+1} \leqslant 1.$$

Таким образом, число

$$n!\,e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = (n-1)!\,m - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$$

должно принадлежать интервалу $(0, 1)$, Вместе с тем, это число целое. Полученное противоречие доказывает иррациональность e.

2°. *Функция* $\sin x$

Имеем

$$\sin^{(k)} x = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right),$$

откуда

$$\sin^{(k)} 0 = \sin\frac{k\pi}{2}.$$

Таким образом, значение производной порядка k в нуле для четных k равно нулю, а для нечетных k оно равно $(-1)^{k-1}$.

Значит, формула Тейлора порядка $2n-1$ для функции $\sin x$ имеет вид

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2n-1}(x), \tag{6.5.5}$$

где для остаточного члена справедливо представление

$$R_{2n-1}(x) = \frac{\sin^{(2n+1)} \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Отсюда следует оценка

$$|R_{2n-1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

которая показывает, что для всех x остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$.

3°. *Функция* $\cos x$

В этом случае рассуждения аналогичны предыдущим. Так как

$$\cos^{(k)} x = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right),$$

то

$$\cos^{(k)} 0 = \cos\frac{k\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n}(x), \qquad (6.5.6)$$

где для остаточного члена справедлива оценка

$$|R_{2n}(x)| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Значит, остаточный член для каждого x стремится к нулю при $n \to \infty$.

4°. *Функции* $\mathbf{sh}\,x$ *и* $\mathbf{ch}\,x$

Так как $\operatorname{sh}^{(k)} x = \operatorname{sh} x$ для четных k и $\operatorname{sh}^{(k)} x = \operatorname{ch} x$ для нечетных k, то $\operatorname{sh}^{(k)} 0 = 0$ для четных k и $\operatorname{sh}^{(k)} 0 = 1$ для нечетных k. Поэтому

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2n-1}(x), \qquad (6.5.7)$$

где для $R_{2n+1}(x)$ справедлива оценка

$$|R_{2n-1}(x)| \leqslant e^{|x|}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Аналогично,

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n}(x), \qquad (6.5.8)$$

где

$$|R_{2n}(x)| \leqslant e^{|x|}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

В обоих этих случаях для каждого фиксированного x остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Заметим, что формулы (6.5.7) и (6.5.8) можно вывести и из (6.5.1).

5°. *Логарифмическая функция* $f(x) = \ln(1+x)$

Здесь в отличие от предыдущих примеров функция определена не для всех x, а только при $x > -1$.

Найдем производные функции $\ln(1+x)$. Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

и при $k \geqslant 2$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)\,(-2)\ldots(-(k-1))}{(1+x)^k} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Поэтому

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + R_n(x), \qquad (6.5.9)$$

где

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1. \qquad (6.5.10)$$

Оценим остаточный член (6.5.10). Если $x \in [0,1]$, то

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}. \qquad (6.5.11)$$

Поэтому для этих x остаточный член формулы (6.5.9) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Если $x \in [-1/2, 0)$, то

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}\right| = \left|\frac{x}{1+\theta x}\right|^{n+1} < \left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1} \leqslant 1.$$

Значит, для этих x также справедлива оценка (6.5.11).

Таким образом, мы установили, что для $x \in [-1/2, 1]$ остаточный член формулы (6.5.9) стремится к нулю при $n \to \infty$.

В главе 16 будет установлено, что остаточный член формулы (6.5.9) при $n \to \infty$ стремится к нулю для $x \in (-1, 1]$, а для остальных x это не так. Представление остаточного члена в форме Лагранжа (6.5.10) не позволяет сделать этот вывод.

6°. *Степенная функция* $f(x) = (1+x)^m$

Сначала рассмотрим случай, когда m — натуральное число.

Если $k \leqslant m$, то

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\dots(m-k+1)(1+x)^{m-k}$$

и, значит,

$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\dots(m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

А если $k > m$, то $f^{(k)}(x) \equiv 0$.

Поэтому остаточный член формулы Тейлора порядка n для $n \geqslant m$ равен нулю и

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{(m-k)!} \cdot \frac{x^k}{k!}.$$

Таким образом, для всех x справедливо равенство

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{(m-k)!k!} x^k = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k, \tag{6.5.12}$$

где C_m^k — биномиальные коэффициенты (5.5.1), которые участвовали в формуле Лейбница для производной произведения двух функций.

Из равенства (6.5.12) легко вывести формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k} \tag{6.5.13}$$

для произвольных чисел a и b.

В самом деле, достаточно рассмотреть $b \neq 0$, а в этом случае

$$(a+b)^m = b^m \left(1 + \frac{a}{b}\right)^m = b^m \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{a^k}{b^k} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k}.$$

Тот факт, что числа C_m^k являются коэффициентами в представлении (6.5.13), служит основанием для названия их биномиальными коэффициентами.

Если m не является натуральным числом, то для всех k

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\dots(m-k+1)(1+x)^{m-k}$$

и, значит,

$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\dots(m-k+1).$$

Поэтому формула Тейлора порядка n имеет вид

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \\ + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x). \tag{6.5.14}$$

В 16 главе будет показано, что при $n \to \infty$ остаточный член формулы Тейлора (6.5.14) для $|x| < 1$ стремится к нулю, для $|x| > 1$ это не так, а для x, равных $+1$ и -1, вопрос решается в зависимости от значения m.

Простое выражение многочлена Тейлора имеет еще функция $\operatorname{arctg} x$, об этом будет говорится в 16 главе. Выражения многочленов Тейлора других элементарных функций сложны и мы не будем на этом останавливаться.

§ 6.6. Исследование функций с помощью старших производных

До сих пор свойства функций характеризовалсь с помощью производных первого порядка. Сейчас будем исследовать свойства функций, используя старшие производные.

Сначала рассмотрим вопрос о локальных экстремумах.

Теорема 6.6.1. *Пусть функция f имеет в точке x_0 производную порядка n, $n \geqslant 1$, причем $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда*

1°. *Если n четно, то f имеет в точке x_0 строгий локальный экстремум, причем это максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$.*

2°. *Если n нечетно, то f строго монотонна в точке x_0. При этом f в точке x_0 строго возрастает, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и строго убывает, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

Доказательство. Заметим, что при $n = 1$ условие теоремы означает $f'(x_0) \neq 0$.

В силу условий на функцию $f(x)$ из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано следует, что

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right), \quad x \to x_0. \tag{6.6.1}$$

Так как $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то в достаточно малой проколотой окрестности точки x_0 знак выражения в правой части оценки (6.6.1) определяется первым слагаемым. Сейчас нас интересует только знак этого выражения при x, близких к x_0, поэтому слагаемое $o((x-x_0)^n)$ можно не учитывать.

Пусть сначала n — четно. Тогда $(x-x_0)^n > 0$ для всех $x \neq x_0$. Поэтому, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0$, т.е. $f(x) > f(x_0)$, для x из достаточно малой проколотой окрестности точки x_0. А это означает, что f имеет в точке x_0 строгий локальный минимум. Если же $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x) - f(x_0) < 0$ для x из достаточно малой проколотой окрестности точки x_0, и, значит, f имеет в точке x_0 строгий локальный максимум.

Пусть теперь n нечетно. Тогда $(x-x_0)^n > 0$ для $x > x_0$ и $(x-x_0)^n < 0$ для $x < x_0$. Поэтому, если $f^{(n)}(x_0) > 0$ и x принадлежит достаточно малой проколотой окрестности точки x_0, то $f(x) > f(x_0)$, если $x > x_0$, и $f(x) < f(x_0)$, если $x < x_0$. Таким образом, функция $f(x)$ строго возрастает в точке x_0. Аналогично рассматривается случай, когда $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Теорема доказана.

Таким образом, если у функции в некоторой точке есть неравная нулю производная какого-либо порядка, то в этой точке функция или имеет строгий локальный экстремум или является строго монотонной. Теорема 6.6.1 неприменима, если функция не имеет в точке отличных от нуля производных, т.е. если все производные до некоторого порядка равны нулю, а производные более высокого порядка не существуют, или если производные любого порядка существуют, но все они равны нулю.

Теорема 6.6.1 сформулирована как достаточное условие существования локального экстремума. Но из этой теоремы можно получить и необходимые условия локального экстремума, которые в частном случае дают теорему Ферма 6.1.2.

Теорема 6.6.2. *Пусть в точке x_0 функция f имеет производную порядка n, $n \geqslant 1$, причем все производные меньшего порядка равны нулю, т.е. $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тогда*

1°. *Если n четно, то условие $f^{(n)}(x_0) \leqslant 0$ необходимо, для того чтобы функция f имела в точке x_0 локальный максимум, а условие $f^{(n)}(x_0) \geqslant 0$ необходимо, для того чтобы функция f имела в точке x_0 локальный минимум.*

2°. *Если n нечетно, то условие $f^{(n)}(x_0) = 0$ необходимо, для того чтобы функция f имела в точке x_0 локальный экстемум.*

Доказательство. Если n четно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то согласно теореме 6.6.1 f имеет в точке x_0 строгий локальный минимум. Значит, локальный максимум возможен только при условии $f^{(n)}(x_0) \leqslant 0$. Аналогично получаем необходимое условие для локального минимума.

Если n нечетно и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то согласно теореме 6.6.1 f строго монотонна в точке x_0. Значит, локальный экстремум в точке x_0 функция f может иметь только в том случае, когда $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Рассмотрим свойства графиков функций, имеющих производные. В § 5.2, было доказано, что существование первой производной функции $f(x)$ в точке x_0 эквивалентно существованию у графика функции f касательной в точке $(x_0, f(x_0))$.

Сейчас нас будут интересовать характеристики графика функции, связанные с положением графика относительно касательной.

Определение. Пусть функция f имеет производную в точке x_0. Говорят, что f *выпукла в точке* x_0, если для x из некоторой окрестности точки x_0 все точки графика функции лежат на касательной в точке x_0 или выше касательной (т.е. нет точек графика, лежащих ниже касательной).

Если же для x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 все точки графика функции лежат выше касательной, то функцию называют *строго выпуклой в точке* x_0.

Определение. Пусть функция f имеет производную в точке x_0. Говорят, что f *вогнута в точке* x_0, если для x из некоторой окрестности точки x_0 все точки графика функции лежат на касательной в точке x_0 или ниже касательной.

Если же для x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 все точки графика функции лежат ниже касательной, то функцию называют *строго вогнутой в точке* x_0.

Определение. Пусть функция f имеет производную в точке x_0. Говорят, что x_0 является *точкой перегиба* функции f, если для x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 все точки графика функции для $x < x_0$ лежат строго по одну сторону от касательной в точке x_0, а для $x > x_0$ — строго по другую сторону от этой касательной.

Если функция имеет в точке бесконечную производную определенного знака, то такую точку также называют точкой перегиба.

Теорема 6.6.3. *Пусть в точке x_0 функция f имеет отличную от нуля производную порядка n, $n \geqslant 2$, а все производные, начиная со второй до порядка $n-1$, равны нулю, т.е. $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда*

1°. *Если n четно, то f в точке x_0 строго выпукла, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и строго вогнута в точке x_0, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

2°. *Если n нечетно, то x_0 является точкой перегиба функции f.*

Доказательство. При $n = 2$ условие на производные означает, что $f''(x_0) \neq 0$.

Уравнение касательной к графику функции в точке x_0 имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Для функции $\varphi(x)$ выполняются условия

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Производные порядка n в точке x_0 функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ равны между собой. Поэтому в случае, когда n четно, согласно теореме 6.6.1 $\varphi(x)$ имеет в точке x_0 строгий локальный минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и строгий локальный максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$. А так как

$$f(x) = \varphi(x) + f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

то в точке x_0 функция $f(x)$ строго выпукла, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и строго вогнута, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Если же n нечетно, то функция $\varphi(x)$ строго монотонна в точке x_0. Значит, x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.

Теорема доказана.

Таким образом, в каждой точке, в которой функция имеет отличную от нулю вторую производную, эта функция является или строго выпуклой или строго вогнутой, причем по знаку второй производной можно узнать, какой именно случай имеет место. Если же вторая производная равна нулю, а третья производная отлична от нуля, то такая точка является точкой перегиба.

Разумеется, функция может иметь точки, которые не являются ее точками выпуклости, вогнутости или точками перегиба. Но в этих точках функция не имеет отличной от нуля производной порядка $n \geqslant 2$.

§ 6.7. Функции, выпуклые на промежутке

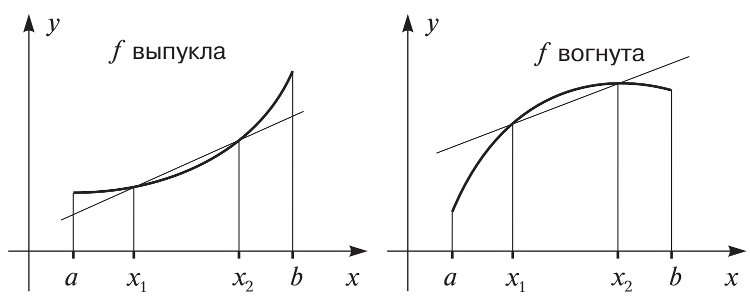
Определение. Функция $f(x)$ называется *выпуклой на промежутке* $[a, b]$, если для любого отрезка $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ все точки графика функции $f(x)$, соответствующие $x \in (x_1, x_2)$, лежат на хорде, проходящей через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, или ниже этой хорды.

Функция $f(x)$ называется *строго выпуклой на промежутке* $[a, b]$, если для любого отрезка $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ все точки графика функции $f(x)$, соответствующие $x \in (x_1, x_2)$, лежат ниже хорды, проходящей через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$.

Здесь, как и в аналогичных случаях ниже, концевые точки a и b могут как принадлежать, так и не принадлежать промежутку $[a, b]$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *вогнутой на промежутке* $[a, b]$, если для любого отрезка $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ все точки графика функции $f(x)$, соответствующие $x \in (x_1, x_2)$, лежат на хорде, проходящей через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, или выше этой хорды.

Функция $f(x)$ называется *строго вогнутой на промежутке* $[a, b]$, если для любого отрезка $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ все точки графика функции $f(x)$, соответствующие $x \in (x_1, x_2)$, лежат выше хорды, проходящей через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$.



Наряду с этой терминологией используют и другую, когда выпуклые функции называют выпуклыми вниз, а вогнутые функции — выпуклыми вверх.

Определения выпуклых и вогнутых функций с помощью свойств их графиков дают наглядное представление о таких функциях, но этими определениями неудобно пользоваться. Укажем свойства самих функций, равносильные их выпуклости и вогнутости.

Заметим, что вогнутость функции $f(x)$ равносильна выпуклости функции $-f(x)$. Это позволяет при изучении свойств выпуклых и вогнутых функций рассматривать только выпуклые функции.

Функции, выпуклые на промежутке, не обязательно имеют производную во всех точках этого промежутка. Например, выпуклой является функция $|x|$. Поэтому в необходимых условиях выпуклости производные не могут участвовать.

Теорема 6.7.1. *Для того чтобы функция f была выпуклой на промежутке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любых точек x_0, x, t_0, t из этого промежутка, удовлетворяющих условиям*

$$x_0 \leqslant t_0 < t, \qquad x_0 < x \leqslant t, \tag{6.7.1}$$

выполнялось неравенство

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}. \tag{6.7.2}$$

Для того чтобы функция f была строго выпуклой на промежутке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любых точек x_0, x, t_0, t из этого промежутка, удовлетворяющих условиям (6.7.1), *выполнялось неравенство*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}. \tag{6.7.3}$$

Доказательство. Пусть функция f выпукла на $[a,b]$.

Сначала докажем неравенство (6.7.2) при $t_0 = x$.

Уравнение хорды, проходящей через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(t, f(t))$ графика функции f, имеет вид

$$y = \frac{t-x}{t-x_0}f(x_0) + \frac{x-x_0}{t-x_0}f(t).$$

Так как $t_0 = x$, то $x_0 < x < t$ и в силу выпуклости f имеем

$$f(x) \leqslant \frac{t-x}{t-x_0}f(x_0) + \frac{x-x_0}{t-x_0}f(t). \tag{6.7.4}$$

Но в нашем случае мы можем написать

$$f(x) = \frac{t-x}{t-x_0}f(x) + \frac{x-x_0}{t-x_0}f(t_0).$$

Поэтому после соответствующей группировки слагаемых оценка (6.7.4) преобразуется в равносильную ей оценку

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(t)-f(x)}{t-x}, \quad x_0 < x < t. \tag{6.7.5}$$

Таким образом, при $t_0 = x$ неравенство (6.7.2) доказано.

Если $x < t_0$, то применив оценку вида (6.7.5) сначала к точкам x_0, x, t_0, а затем к точкам x, t_0, t, получим

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(t_0)-f(x)}{t_0-x} \leqslant \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0},$$

т.е. справедливо неравенство (6.7.2).

Рассмотрим оставшийся случай, когда $x_0 \leqslant t_0 < x \leqslant t$.

По аналогии с (6.7.4) оценим $f(t_0)$ через $f(x_0)$ и $f(x)$, а $f(x)$ через $f(t_0)$ и $f(t)$:

$$f(t_0) \leqslant \frac{x-t_0}{x-x_0}f(x_0)+\frac{t_0-x_0}{x-x_0}f(x), \quad f(x) \leqslant \frac{t-x}{t-x_0}f(t_0)+\frac{x-x_0}{t-t_0}f(t).$$

Сложив эти неравенства, после приведения подобных слагаемых приходим к (6.7.2).

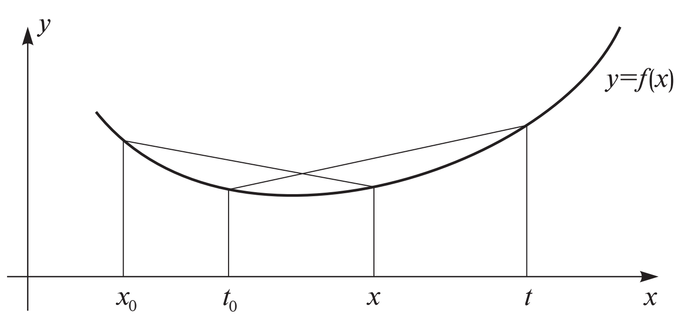
Итак, необходимость условия (6.7.2) для выпуклых функций установлена.

Достаточность этого условия вытекает из равносильности оценок (6.7.4) и (6.7.5).

Доказательство утверждения теоремы о строго выпуклых функциях проводится аналогично. Нужно только в неравенстве (6.7.4), его следствиях и аналогах вместо $\leqslant$ писать $<$.

Теорема доказана.

Геометрически оценки (6.7.2) и (6.7.3) означают сравнение углов наклона хорды, проходяшей через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$, и хорды, проходящей через точки $(t_0, f(t_0))$ и $(t, f(t))$.



Так как в теореме 6.7.1 при доказательстве достаточности условий (6.7.2) и (6.7.3) использовалась только оценка (6.7.4), то имеет место следующее утверждение.

С л е д с т в и е 6.7.2. *Для того чтобы функция f была выпуклой на промежутке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любых точек $x_0 < x < t$ из этого промежутка выполнялось неравенство*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(t)-f(x)}{t-x}. \tag{6.7.6}$$

А для строгой выпуклости функции f необхолимо и достаточно условие

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \frac{f(t)-f(x)}{t-x}, \quad x_0 < x < t. \tag{6.7.7}$$

С помощью неравенства (6.7.2) устанавливается односторонняя дифференцируемость выпуклых функций.

Теорема 6.7.3. *Если функция f выпукла на промежутке $[a,b]$, то в каждой внутренней точке x_0 этого промежутка существуют односторонние производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$.*

При этом, если $a < x_1 < x_2 < b$, то $f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2)$, а для строго выпуклых функций $f'_+(x_1) < f'_-(x_2)$.

Доказательство. Так как x_0 — внутренняя точка промежутка $[a,b]$, то для достаточно малых положительных h точки x_0-h и x_0+h принадлежат (a,b).

Из неравенства (6.7.6) следует, что

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} \leqslant \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad h > 0. \tag{6.7.8}$$

Оценка (6.7.2) показывает, что при убывании h дробь из правой части неравенства (6.7.8) убывает, а дробь из левой части — возрастает. Поэтому, переходя в (6.7.8) к пределу при $h \to +0$, получим существование производных $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ и неравенство $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$.

Отметим, что из существования односторонних производных вытекает непрерывность функции f на (a,b). Точками разрыва могут быть только концевые точки промежутка выпуклости.

Пусть теперь $a < x_1 < x_2 < b$. Для произвольной точки $x \in (x_1,x_2)$ из (6.7.6) находим

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \tag{6.7.9}$$

Из (6.7.9) при $x \to x_1+0$ получаем

$$f'_+(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \tag{6.7.10}$$

а при $x \to x_2 - 0$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'_-(x_2). \qquad (6.7.11)$$

Таким образом, $f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2)$.

Наконец, если функция f строго выпукла, то в (6.7.9) имеем строгое неравенство. Так как при убывании x дробь из левой части (6.7.9) строго убывает, то вместо (6.7.10) получим

$$f'_+(x_1) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

что вместе с (6.7.11) дает оценку $f'_+(x_1) < f'_-(x_2)$.

Теорема доказана.

Следствие 6.7.4. *Если функция выпукла на промежутке, то она дифференцируема во всех внутренних точках этого промежутка, за исключением не более чем счетного множества точек.*

В самом деле, для каждой внутренней точки x_0 промежутка выпуклости функции f, в которой $f'_-(x_0) < f'_+(x_0)$, можно найти рациональное число, принадлежащее интервалу $(f'_-(x_0), f'_+(x_0))$. Значит, мощность множества точек недифференцируемости не может превышать мощности множества рациональных чисел.

Выпуклость функций, имеющих первую производную, характеризуется в терминах монотонности производной.

Теорема 6.7.5. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда для выпуклости $f(x)$ на (a, b) необходимо и достаточно возрастание производной $f'(x)$, а для строгой выпуклости $f(x)$ необходимо и достаточно строгое возрастание производной $f'(x)$.*

Доказательство. Согласно теореме 6.7.3, если дифференцируемая функция выпукла на (a, b), то ее производная возрастает. А в случае строгой выпуклости функции производная строго возрастает. Таким образом, условия теоремы необходимы.

Докажем, что из возрастания производной $f'(x)$ на (a, b) следует выпуклость $f(x)$.

Рассмотрим произвольные три точки x_1, x, x_2, такие, что $a < x_1 < x < x_2 < b$. Пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа, находим точки $\xi_1 \in (x_1, x)$ и $\xi_2 \in (x, x_2)$, для которых выполняются равенства

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1)$$

и

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2).$$

Тогда из $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$ следует, что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

а из $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ следует

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Отсюда согласно следствию 6.7.2 получаем выпуклость и, соответственно, строгую выпуклость функции $f(x)$ на (a, b).

Теорема доказана.

Если функция f имеет вторую производную f'', то, используя еще следствие 6.2.8, приходим к следующему утверждению о связи выпуклости функции со знаком ее второй производной.

Теорема 6.7.6. *Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную на интервале (a, b). Тогда*

1°. *Условие $f''(x) \geqslant 0$ на (a, b) необходимо и достаточно для выпуклости функции $f(x)$;*

2°. *Если $f''(x) > 0$ на (a, b), то функция $f(x)$ строго выпукла на (a, b).*

Заметим, что в теореме 6.7.6 условие $f''(x) > 0$ не является необходимым для строгой выпуклости функции $f(x)$. Это видно на примере функции x^4, у которой вторая производная $12x^2$ обращается в нуль в точке $x = 0$, хотя эта функция строго выпукла на всей оси, что следует из строгого возрастания ее первой производной $4x^3$.

Результаты этой главы, позволяют высказать следующие рекомендации по построению графиков функций f, имеющих вторую производную.

Сначала находим промежутки, где $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$, и нули первой производной. Это показывает промежутки монотонности и точки, в которых функция может иметь локальные экстремумы. По второй производной находим точки, которые могут быть точками перегиба, и промежутки выпуклости и вогнутости. Глобальные экстремумы находят, сравнивая значения локальных экстремумов между собой и со значениями функции в концах промежутка.

§ 6.8. Некоторые классические неравенства

Теорема 6.8.1 (Неравенство Иенсена). *Пусть функция $f(x)$ выпукла на отрезке $[a, b]$. Тогда для любых точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geqslant 2$, из $[a, b]$ и любых положительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ таких, что $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, справедливо неравенство*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k), \tag{6.8.1}$$

называемое неравенством Иенсена.

Доказательство. Проведем индукцию по n. Докажем сначала неравенство (6.8.1) при $n = 2$.

Пусть для определенности $x_1 < x_2$. Рассмотрим точку $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, она лежит между x_1 и x_2.

Хорда, соединяющая точки графика функции $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, имеет уравнение

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Значит, в силу выпуклости функции f справедливо неравенство

$$f(x) = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2). \tag{6.8.2}$$

Найдем значение дроби

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2}{x_2 - x_1} = \frac{x_2(1 - \alpha_2) - x_1 \alpha_1}{x_2 - x_1} = \alpha_1.$$

Аналогично,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = \alpha_2.$$

Таким образом, из (6.8.2) получаем

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

т.е. для $n = 2$ теорема доказана.

Предположим теперь, что при $n = m$ неравенство (6.8.1) уже установлено и докажем его для $n = m + 1$.

Введем обозначения

$$\lambda := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k, \qquad \lambda_k := \frac{\alpha_k}{\lambda}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1,$$

то по предположению индукции

$$f\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f(x_k). \tag{6.8.3}$$

Пользуясь тем, что $\lambda + \alpha_{m+1} = 1$, неравенством (6.8.1) при $n = 2$ и оценкой (6.8.3), получаем

$$f\left(\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k x_k\right) = f\left(\lambda \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k + \alpha_{m+1} x_{m+1}\right) \leqslant \lambda f\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k\right) +$$

$$+\alpha_{m+1} f(x_{m+1}) \leqslant \lambda \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f(x_k) + \alpha_{m+1} f(x_{m+1}) = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k f(x_k)$$

и мы пришли к неравенству (6.8.1) при $n = m + 1$.

Теорема доказана.

Если функция $f(x)$ вогнута на отрезке $[a, b]$, то при тех же условиях на точки x_k и числа α_k неравенство Иенсена имеет вид

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k). \tag{6.8.4}$$

С помощью неравенства Иенсена легко доказывается следующее утверждение.

Лемма 6.8.2. *Пусть $p > 1$ и q — сопряженное с p число, т.е.*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{6.8.5}$$

Тогда для любых положительных чисел c и d справедливо неравенство

$$c\, d \leqslant \frac{1}{p}\, c^p + \frac{1}{q}\, d^q. \tag{6.8.6}$$

Доказательство. Так как функция $\ln x$ вогнута на $(0, +\infty)$, а числа p и q связаны равенством (6.8.5), то согласно неравенству Иенсена (6.8.4)

$$\ln\left(\frac{1}{p}\,c^p + \frac{1}{q}\,d^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln c^p + \frac{1}{q}\ln d^q = \ln c\,d.$$

Отсюда в силу строгой монотонности логарифмической функции вытекает оценка (6.8.6).

Теорема 6.8.3 (Неравенство Гёльдера). *Пусть $p > 1$ и q — сопряженное с p число. Тогда для любых $2n$ неотрицательных чисел $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}, \tag{6.8.7}$$

называемое неравенством Гёльдера.

Доказательство. Если все числа a_k или все числа b_k равны нулю, то неравенство (6.8.7) очевидно. Поэтому будем считать, что и среди a_k и среди b_k есть отличные от нуля числа.

Для каждого k введем числа

$$c_k := a_k \bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}; \qquad d_k := b_k \bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

и запишем для них оценку (6.8.6):

$$c_k\,d_k \leqslant \frac{1}{p}\,a_k^p \bigg/ \sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{q}\,b_k^q \bigg/ \sum_{i=1}^{n} b_i^q.$$

Сложим полученные неравенства:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\,d_k \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Подставив сюда выражения чисел c_k и d_k, приходим к неравенству (6.8.7).

Теорема доказана.

Отметим важный частный случай теоремы 6.8.3, соответствующий $p = 2$. В этом случае $q = 2$.

Теорема 6.8.4 (Неравенство Коши–Буняковского). *Для любых $2n$ чисел $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2}, \qquad (6.8.8)$$

называемое неравенством Коши–Буняковского.

Здесь опущено требование неотрицательности чисел a_k, b_k. Конечно, от этого требования можно было отказаться и в неравенстве Гёльдера (6.8.7), если заменить в правой его части a_k^p на $|a_k|^p$ и b_k^q на $|b_k|^q$.

При $n = 3$ неравенство Коши–Буняковского можно истолковать как оценку модуля скалярного произведения векторов (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) через длины этих векторов (считаем, что a_k и b_k — компоненты векторов в ортонормированном базисе).

Теорема 6.8.5 (Неравенство Минковского). *Пусть числа $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ неотрицательны и $p > 1$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p}, \qquad (6.8.9)$$

называемое неравенством Минковского.

Доказательство. Запишем тождество

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k (a_k + b_k)^{p-1}$$

и применим к каждой из сумм в его правой части неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{q(p-1)} \right)^{1/q} + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{q(p-1)} \right)^{1/q} = \\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p} \right] \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Разделив обе части полученного неравенства на

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/q},$$

приходим к (6.8.9).

Теорема доказана.

Отметим частный случай неравенства (6.8.9), соответствующий $p=2$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{1/2}. \qquad (6.8.10)$$

При $n=3$ неравенство (6.8.10) можно истолковать как оценку длины суммы векторов (a_1,a_2,a_3) и (b_1,b_2,b_3) через длины самих этих векторов. В связи с этим неравенство (6.8.10) и неравенство Минковского (6.8.9) называют неравенством треугольника.

В дальнейшем мы увидим, что неравенства (6.8.1), (6.8.7), (6.8.9) являются частными случаями более общих неравенств, которые носят те же названия.

Глава 7
КРИВЫЕ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 7.1. Векторнозначные функции

До сих пор рассматривались функции, значениями которых были действительные числа, хотя во многих случаях значениями могли быть и комплексные числа. Но понятие функции имеет очень общий характер и их значениями (как и аргументами) могут быть объекты произвольной природы.

В связи с изучением кривых будут нужны векторнозначные функции числового аргумента, т.е. функции, аргументами которых являются числа, а значениями — векторы трехмерного пространства. Такие функции называют еще вектор-функциями.

В тех случаях, когда рассматриваются и функции, значениями которых являются векторы, и функции, значениями которых являются числа, первые называют векторными, а вторые — скалярными.

Будем считать, что трехмерном евклидовом пространстве зафиксирована некоторая декартова прямоугольная система координат. Тогда между векторами $\overline{r}$ и упорядоченными тройками чисел

(x, y, z) — компонентами векторов — устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Задание на отрезке числовой прямой $[a, b]$ векторнозначной функции $\overline{r}(t)$ равносильно заданию на $[a, b]$ трех скалярных функций $x(t), y(t), z(t)$.

Для вектор-функций вводятся понятия предела, непрерывности, производной. При этом близость значений функции $\overline{r}(t_1)$ и $\overline{r}(t_2)$ понимается как малость длины вектора разности $\overline{r}(t_1) - \overline{r}(t_2)$.

Приведем определение предела вектор-функции по Коши.

Определение. Вектор $\overline{r}_0$ называется *пределом* функции $\overline{r}(t)$ в точке t_0, если эта функция определена в некоторой проколотой окрестности точки t_0 и для каждого положительного ε существует $\delta > 0$ такое, что для всех значений t из проколотой δ-окрестности точки t_0 выполняется неравенство

$$|\overline{r}(t) - \overline{r}_0| < \varepsilon.$$

Обозначают предел векторнозначной функции как и пределы скалярных функций:

$$\overline{r}_0 = \lim_{t \to t_0} \overline{r}(t).$$

Если $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и $\overline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, то

$$|\overline{r}(t) - \overline{r}_0| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}.$$

Эта формула показывает, что существоание предела $\lim \overline{r}(t) = \overline{r}_0$ равносильно существованию трех пределов $\lim x(t) = x_0$, $\lim y(t) = y_0$, $\lim z(t) = z_0$.

Пределы векторных функций обладают многими свойствами пределов скалярных функций. Например, если функция $\overline{r}(t)$ имеет предел в точке t_0, то в некоторой проколотой окрестности точки t_0 функция $\overline{r}(t)$ ограничена, т.е. ограничены длины векторов $\overline{r}(t)$.

Перечислим свойства пределов, связанные с действиями над вектор-функциями. Пусть векторные функции $\overline{r}_1(t)$, $\overline{r}_2(t)$ и скалярная функция $\alpha(t)$ имеют пределы при $t \to t_0$. Тогда при $t \to t_0$ существуют следующие пределы и для них выполняются равенства:

$$\lim\,(\overline{r}_1(t) \pm \overline{r}_2(t)) = \lim\,\overline{r}_1(t) \pm \lim\,\overline{r}_2(t);$$
$$\lim\,\alpha(t)\,\overline{r}(t) = \lim\,\alpha(t)\,\lim\,\overline{r}(t);$$
$$\lim\,\big(\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t)\big) = \big(\lim\,\overline{r}_1(t), \lim\,\overline{r}_2(t)\big);$$
$$\lim\,\big[\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t)\big] = \big[\lim\,\overline{r}_1(t), \lim\,\overline{r}_2(t)\big].$$

Эти свойства можно вывести из свойств пределов скалярных функций, переходя к соответствующим равенствам для компонент векторов.

Но можно провести рассуждения для векторнозначных функций. Приведем для примера доказательство утверждения о переходе к пределу в скалярном произведении.

Пусть $\overline{r}_1^* := \lim \overline{r}_1(t)$ и $\overline{r}_2^* := \lim \overline{r}_2(t)$. Тогда

$$(\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t)) - (\overline{r}_1^*, \overline{r}_2^*) = (\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t) - \overline{r}_2^*) + (\overline{r}_1(t) - \overline{r}_1^*, \overline{r}_2^*).$$

Поэтому

$$\left|\big(\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t)\big) - \big(\overline{r}_1^*, \overline{r}_2^*\big)\right| \leqslant \left|\overline{r}_1(t)\right| \left|\overline{r}_2(t) - \overline{r}_2^*\right| + \left|\overline{r}_1(t) - \overline{r}_1^*\right| \left|\overline{r}_2^*\right|.$$

Отсюда в силу ограниченности функции $\overline{r}_1(t)$ в достаточно малой проколотой окрестности точки, в которой берется предел, вытекает требуемая оценка.

Непрерывность вектор-функций вводится по аналогии с непрерывностью скалярных функций. Функция $\overline{r}(t)$ называется непрерывной в точке t_0, если

$$\lim_{t\to t_0} \overline{r}(t) = \overline{r}(t_0).$$

Из свойств пределов следует, что непрерывность векторнозначных функций равносильна непрерывности трех скалярных функций — компонент векторов. А операции сложения и вычитания векторов, умножения вектора на скаляр, скалярного и векторного умножения векторов, произведенные над непрерывнми вектор-функциями, дают непрерывные вектор-функции.

Производная векторнозначной функции $\overline{r}(t)$ определяется как предел

$$\overline{r}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\overline{r}(t+\Delta t) - \overline{r}(t)}{\Delta t},$$

если этот предел существует.

Понятно, что существование производной $\overline{r}'(t)$ равносильно существованию производных $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$. При этом $\overline{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Если функция $\overline{r}(t)$ имеет производную в точке или на промежутке, то эту функцию называют дифференцируемой соответственно в точке или на промежутке.

Отметим формулу для производной сложной функции.

Пусть на отрезке $[\alpha, \beta]$ задана дифференцируемая скалярная функция $t = \lambda(\tau)$, значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, и на $[a,b]$ задана дифференцируемая векторная функция $\overline{r}(t)$. Тогда сложная функция $\overline{R}(\tau) := \overline{r}(\lambda(\tau))$ дифференцируема на $[\alpha,\beta]$ и справедлива формула

$$\overline{R}'_\tau = \overline{r}'_t \cdot \lambda'_\tau.$$

Доказать это проще всего, рассматривая компоненты векторных функций.

Заметим, наконец, что аналогично даются определения односторонних пределов, односторонней непрерывности и односторонних производных.

Многие свойства производных скалярных функций легко переносятся на производные векторых функций. Например, из существования производной в точке следует непрерывность функции в этой точке.

Кроме того, для производных имеют место следующие равенства:

$$(\overline{r}_1(t) \pm \overline{r}_2(t))' = \overline{r}'_1(t) \pm \overline{r}'_2(t);$$
$$(\alpha(t) \cdot \overline{r}(t))' = \alpha'(t)\,\overline{r}(t) + \alpha(t)\,\overline{r}'(t);$$
$$\big(\overline{r}_1(t),\, \overline{r}_2(t)\big)' = \big(\overline{r}'_1(t),\, \overline{r}_2(t)\big) + \big(\overline{r}_1(t),\, \overline{r}'_2(t)\big);$$
$$\big[\overline{r}_1(t),\, \overline{r}_2(t)\big]' = \big[\overline{r}'_1(t),\, \overline{r}_2(t)\big] + \big[\overline{r}_1(t),\, \overline{r}'_2(t)\big].$$

Здесь, как и в скалярном случае, предполагается, что существуют производные, записанные справа, и утверждается существование производных, записанных слева, и справедливость равенств.

Но такое важное свойство как формула конечных приращений Лагранжа прямого аналога в векторном случае не имеет.

В самом деле, рассмотрим функцию $\overline{r}(t) := (\cos t, \sin t)$, значениями которой являются двумерные векторы.

Тогда $\overline{r}(2\pi) - \overline{r}(0) = \overline{0}$. Но $|\overline{r}'(t)| = 1$, так как $\overline{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$. Значит, ни для какого ξ не может выполняться равенство

$$\overline{r}(2\pi) - \overline{r}(0) = \overline{r}'(\xi)(2\pi - 0).$$

Тем не менее одно из основных следствий формулы конечных приращений Лагранжа имеет место и для векторнозначных функций.

Теорема 7.1.1. *Пусть функция $\overline{r}(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и $M := \max_{t\in[a,b]} |\overline{r}'(t)|$. Тогда справедлива оценка*

$$|\overline{r}(b) - \overline{r}(a)| \leqslant M(b-a). \tag{7.1.1}$$

Доказательство. Если $\overline{r}(b) = \overline{r}(a)$, то оценка (7.1.1) очевидна. Поэтому будем считать $\overline{r}(b) - \overline{r}(a) \neq \overline{0}$.

Положим
$$\overline{e} := \frac{\overline{r}(b) - \overline{r}(a)}{|\overline{r}(b) - \overline{r}(a)|}.$$

Тогда $|\overline{e}| = 1$ и
$$\bigl|\overline{r}(b) - \overline{r}(a)\bigr| = \bigl(\overline{r}(b) - \overline{r}(a), \overline{e}\bigr) = \bigl(\overline{r}(b), \overline{e}\bigr) - \bigl(\overline{r}(a), \overline{e}\bigr).$$

Введем функцию
$$f(t) := \bigl(\overline{r}(t), \overline{e}\bigr).$$

Эта скалярная функция непрерывно дифференцируема на $[a, b]$. Поэтому согласно формуле конечных приращений Лагранжа существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Но
$$|f'(\xi)| = \bigl|(\overline{r}'(\xi), \overline{e})\bigr| \leqslant |\overline{r}'(\xi)| \leqslant M.$$

Таким образом,
$$|\overline{r}(b) - \overline{r}(a)| \leqslant M(b - a).$$

Теорема доказана.

§ 7.2. Длина кривой

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $\overline{r}(t)$, значениями которой являются векторы трехмерного евклидова пространства $\mathbb{E}^3$. Будем считать, что в $\mathbb{E}^3$ зафиксирована декартова прямоугольная система координат и $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Рассмотрим точки $M(t) := (x(t), y(t), z(t))$, радиусами-векторами которых являются векторы $\overline{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Полученное множество точек будем называть непрерывной кривой Γ в $\mathbb{E}^3$ и писать
$$\Gamma := \{\overline{r}(t),\ t \in [a, b]\}. \qquad (7.2.1)$$

Каждому значению параметра t соответствует точка $M(t)$ на кривой Γ. Когда t пробегает отрезок $[a, b]$, возрастая от a к b, кривая Γ служит траекторией движения точки $M(t)$ и возрастание t задает направление движения по кривой. Говорят, что этим на кривой Γ задается ориентация.

Если параметр t будет изменяться от b к a, то получим ту же кривую Γ, но с противоположным направлением движения (с противоположной ориентацией).

Ясно, что непрерывная кривая может быть задана разными непрерывными вектор-функциями. Например, если сделать замену аргумента t по формуле $t = \lambda(\tau)$, где $\lambda(\tau)$ — непрерывная строго возрастающая функция, отображающая отрезок $[\alpha, \beta]$ на $[a, b]$, то получим ту же кривую (7.2.1), заданную теперь формулой

$$\Gamma := \{\overline{r}\,(\lambda(\tau)),\ \tau \in [\alpha, \beta]\}.$$

При этом в силу возрастания функции λ ориентация на кривой Γ сохранится. Если же взять функцию λ непрерывной и строго убывающей, то получим кривую Γ с противоположной ориентацией.

Определим длину кривой.

Здесь понадобится понятие ломаной. Пусть заданы точки M_0, $M_1, \dots, M_n$. Соединив их последовательно отрезками с концами в точках M_{k-1} и M_k, $k = 1, 2, \dots, n$, получим ломаную, которая является непрерывной кривой. Длину этой ломаной определим как сумму длин составляющих ее отрезков $M_{k-1}M_k$.

Пусть задана непрерывная кривая $\Gamma := \{\overline{r}(t),\ t \in [a, b]\}$. Введем разбиение T отрезка $[a, b]$ точками t_k:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Построим ломаную с вершинами в точках $M_k = M(\overline{r}(t_k))$, $k = 0, 1, \dots, n$. Такую ломаную называют вписанной в кривую Γ. Длину полученной ломаной обозначим σ_T.

Определение. *Длиной* непрерывной кривой Γ называется верхняя грань длин вписанных в нее ломаных:

$$S_\Gamma := \sup_T \sigma_T. \tag{7.2.2}$$

Здесь sup понимается как точная верхняя грань, если она существует, и как $+\infty$, если величины σ_T не ограничены.

Определение длины кривой не зависит от функции $\overline{r}(t)$, с помощью которой кривая задана, поскольку в определении длины участвуют только ломаные, вписанные в кривую.

Ясно, что всегда $0 \leqslant S_\Gamma \leqslant +\infty$. Если $S_\Gamma < +\infty$, то кривая Γ называется спрямляемой. Если $S_\Gamma = +\infty$, кривую называют неспрямляемой.

Теорема 7.2.1. *Пусть заданы непрерывная кривая* $\Gamma := \{\overline{r}(t),\ t \in [a, b]\}$ *и точка* $c \in (a, b)$. *Положим*

$$\Gamma_1 := \{\overline{r}(t),\ t \in [a, c]\}, \quad \Gamma_2 := \{\overline{r}(t),\ t \in [c, b]\}.$$

Тогда

$$S_\Gamma = S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}. \qquad (7.2.3)$$

Доказательство. Заметим, что спрямляемость кривых не предполагается и, как обычно, сумма числа и $+\infty$ считается равной $+\infty$.

Для произвольного разбиения T отрезка $[a, b]$ построим разбиение T^*, полученное путем добавления к T точки c, если ее там не было. Ясно, что при этом длина вписанной в Γ ломаной не может уменьшится, т.е. $\sigma_T \leqslant \sigma_{T^*}$.

Пусть T_1 и T_2 — те разбиения отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, которые порождаются разбиением T^*. Тогда длины ломаных σ_{T^*}, σ_{T_1} и σ_{T_2}, вписанных соответственно в кривые Γ, Γ_1 и Γ_2, связаны равенством $\sigma_{T^*} = \sigma_{T_1} + \sigma_{T_2}$.

Поэтому

$$\sigma_T \leqslant \sigma_{T_1} + \sigma_{T_2}.$$

Заменив в правой части этой оценки длины ломаных на длины соответствующих кривых, получим

$$\sigma_T \leqslant S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}. \qquad (7.2.4)$$

Теперь, взяв в левой части оценки (7.2.4) верхнюю грань по разбиениям T отрезка $[a, b]$, находим

$$S_\Gamma \leqslant S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}. \qquad (7.2.5)$$

Установим для S_Γ оценку снизу:

$$S_\Gamma \geqslant S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}. \qquad (7.2.6)$$

Если $S_\Gamma = +\infty$, то оценка (7.2.6) очевидна. Поэтому нужно рассмотреть случай, когда $S_\Gamma < +\infty$.

Пусть T_1 и T_2 — произволные разбиения отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно и T — порожденное ими разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда $\sigma_T = \sigma_{T_1} + \sigma_{T_2}$, откуда

$$\sigma_{T_1} = \sigma_T - \sigma_{T_2}$$

и, значит,

$$\sigma_{T_1} \leqslant S_\Gamma - \sigma_{T_2}.$$

Пользуясь тем, что правая часть этого неравенства не зависит от разбиения T_1, переходим в левой части к верхней грани по разбиениям T_1:

$$S_{\Gamma_1} \leqslant S_\Gamma - \sigma_{T_2},$$

откуда следует, что
$$\sigma_{T_2} \leqslant S_\Gamma - S_{\Gamma_1}.$$

Выражение в правой части этого неравенства является фиксированным числом. Поэтому, заменив левую часть неравенства на верхнюю грань величин σ_{T_2} по разбиениям T_2, получим

$$S_{\Gamma_2} \leqslant S_\Gamma - S_{\Gamma_1}$$

и мы пришли к (7.2.6).

Из (7.2.5) и (7.2.6) вытекает равенство (7.2.3) и теорема доказана.

Свойство длины кривой, выраженное равенством (7.2.3), называют аддитивностью: длина объединения двух кривых равна сумме длин этих кривых.

§ 7.3. Гладке кривые

Можно показать, но не будем на этом останавливаться, что если в определении кривой на функцию $\overline{r}(t)$ не накладывать никаких условий, кроме непрерывности, то в качестве непрерывных кривых можно получить множества точек, не соответствующие интуитивным представлениям о кривой как о "тонкой нити".

Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться более узкие классы кривых.

Определение. Кривая
$$\Gamma := \{\overline{r}(t),\, t \in [a,b]\} \tag{7.3.1}$$
называется *непрерывно дифференцируемой*, если функция $\overline{r}(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$.

Если функция $\overline{r}(t)$ непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную, то кривая (7.3.1) называется *кусочно непрерывно дифференцируемой*.

Теорема 7.3.1. *Непрерывно дифференцируемая кривая* (7.3.1) *спрямляема и для ее длины справедливы оценки*

$$\sqrt{m_x^2+m_y^2+m_z^2}\,(b-a) \leqslant S_\Gamma \leqslant \sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}\,(b-a), \tag{7.3.2}$$

где
$$m_x := \min_{t\in[a,b]} |x'(t)|, \quad M_x := \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$$

и аналогично определяются величины m_y, M_y, m_z, M_z.

Доказательство. Для произвольного разбиения T отрезка $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

имеем

$$\sigma_T = \sum_{k=1}^{n} |\overline{r}(t_k) - \overline{r}(t_{k-1})| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2 + [z(t_k) - z(t_{k-1})]^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[(t_k - t_{k-1})\, x'(\xi_k)]^2 + [(t_k - t_{k-1})\, y'(\eta_k)]^2 + [(t_k - t_{k-1})\, z'(\zeta_k)]^2},$$

где ξ_k, η_k, ζ_k — некоторые точки из (a,b).

Отсюда

$$\sigma_T = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{[x'(\xi_k)]^2 + [y'(\eta_k)]^2 + [z'(\zeta_k)]^2}.$$

Переходя здесь к минимальным и максимальным на $[a,b]$ значениям модулей производных, получаем

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}(b-a) \leqslant \sigma_T \leqslant \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}(b-a).$$

Из этих оценок вытекает (7.3.2) и, в частности, спрямляемость кривой Γ.

Теорема доказана.

Оценка (7.3.2) справедлива и для кусочно непрерывно дифференцируемых кривых. Доказательство остается тем же, если заметить, что в определении длины кривой (7.2.2) можно рассматривать только такие разбиения T, среди точек которых содержатся все точки, где у функции $\overline{r}(t)$ нет производной.

Определение. Пусть кривая

$$\Gamma := \{\overline{r}(\tau),\ \tau \in [a,b]\} \tag{7.3.3}$$

спрямляема и

$$\Gamma(t) := \{\overline{r}(\tau),\ \tau \in [a,t]\}$$

— часть кривой Γ, соответствующая изменению параметра τ от a до $t \leqslant b$. Длиной дуги кривой Γ называется функция

$$s(t) := S_{\Gamma(t)}, \quad t \in [a,b].$$

Теорема 7.3.2. *Если кривая* (7.3.3) *непрерывно дифференцируема, то длина дуги* $s(t)$ *монотонно возрастает, имеет непрерывную производную и справедливо равенство*

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \left|\frac{d\overline{r}(t)}{dt}\right|. \tag{7.3.4}$$

Доказательство. Возрастание функции $s(t)$ следует из определения длины дуги. Этот факт верен для любой спрямляемой кривой.

Рассмотрим отношение приращения функции $s(t)$ к приращению аргумента $\Delta s/\Delta t$. В силу возрастания функции $s(t)$ для всех Δt имеем

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \geqslant 0. \tag{7.3.5}$$

Выберем точку $t_0 \in (a, b)$ и при заданном приращении аргумента Δt рассмотрим часть кривой, соответствующую изменению аргумента t в пределах $[t_0, t_0 + \Delta t]$, если $\Delta t > 0$, и $[t_0 + \Delta t, t_0]$, если $\Delta t < 0$. Здесь считается, что Δt достаточно мало и мы не выходим за пределы отрезка $[a, b]$.

В силу теоремы 7.3.1 для приращения функции $s(t)$, соответствующего этому приращению аргумента Δt, справедливы оценки сверху и снизу

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}\, |\Delta t| \leqslant |\Delta s| \leqslant \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}\, |\Delta t|, \tag{7.3.6}$$

где m_x, M_x и остальные подобные величины — это минимумы и максимумы модулей производных компонент вектора $\overline{r}(t)$ на данном отрезке изменения аргумента t.

Из (7.3.6) и (7.3.5) находим

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} \leqslant \frac{\Delta s}{\Delta t} \leqslant \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

и, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, в силу непрерывности производной $\overline{r}'(t)$ получаем (7.3.4).

Эти рассуждения охватывают и случай, когда t_0 является одной из концевых точек отрезка $[a, b]$.

Теорема доказана.

Определение. Кривая

$$\Gamma := \{\overline{r}(t),\, t \in [a, b]\}$$

называется *гладкой*, если она непрерывно дифференцируема и $\overline{r}'(t) \neq \overline{0}$ для всех $t \in [a, b]$.

Кривая называется *кусочно гладкой*, если она непрерывна и является объединением конечного числа гладких кривых.

Если кривая Γ является гладкой, то в каждой точке $t_0 \in [a, b]$ отлична от нуля по крайней мере одна из производных $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$. Пусть для определенности $x'(t_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки t_0 производная $x'(t)$ сохраняет знак и, следовательно, функция $x(t)$ строго монотонна.

Значит, в этой окрестности $x(t)$ имеет обратную функцию $t = t(x)$, которая непрерывно дифференцируема. Поэтому в некоторой окрестности соответствующей точки кривой саму кривую можно задать уравнениями $y = y(t(x))$, $z = z(t(x))$, т.е. уравнениями вида $y = g(x)$, $z = h(x)$.

Особенно просто это выглядит для плоских кривых. Тогда $z \equiv 0$ и уравнение соответствующего куска гладкой кривой имеет вид $y = g(x)$. При этом функция $g(x)$ имеет непрерывную производную.

Таким образом, плоская гладкая кривая в некоторой окрестности каждой ее точки представляет собой график непрерывно дифференцируемой функции.

Рассмотрим гладкую кривую $\Gamma := \{\overline{r}(t),\ t \in [a, b]\}$. Вектор

$$\frac{\Delta\overline{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)}{\Delta t}$$

лежит на секущей, проходящей через точки кривой, соответствующие значениям t, равным $t_0 + \Delta t$ и t_0. Для каждого Δt этот вектор направлен в сторону возрастания параметра t. Так как существует ненулевой предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{r}(t)}{\Delta t},$$

то этот вектор определяет предельное положение секущей, которое называют касательным направлением. Прямую, параллельную вектору $\overline{r}'(t_0)$, проходящую через точку, радиусом-вектором которой является $\overline{r}(t_0)$, называют касательной к кривой Γ в точке $\overline{r}(t_0)$.

В применении к графику непрерывно дифференцируемой функции такое определение касательной совпадает с тем, которое было дано в § 5.2.

Если кривая $\Gamma := \overline{r}(t),\ t \in [a, b]\}$ является гладкой, то $|\overline{r}'(t)| > 0$ и согласно теореме 7.3.2 для функции длины дуги $s(t)$ имеем $s'(t) > 0$. Поэтому функция $s(t)$ является строго монотонной и ее можно взять в качестве параметра в определении кривой.

Тогда Γ можно рассматривать как кривую, заданую векторной функцией $\overline{r}(t(s))$. Изменив обозначения, получим

$$\Gamma := \{\overline{r}(s),\ s \in [0, S_\Gamma]\},$$

причем

$$\left|\frac{d\overline{r}(s)}{ds}\right| = \frac{ds}{ds} = 1.$$

Таким образом, при $\Delta s \to 0$

$$\left|\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta s}\right| \to 1.$$

Геометрически это означает, что длина хорды, соединяющей две точки гладкой кривой, близка длине части кривой, ограниченной этими точками.

Содержание

С. А. Теляковский

Курс лекций по математическому анализу. I семестр
М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 160 стр.

Подписано в печать 31.05.2002 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 10,0 п.л.
Заказ 14 Тираж 350 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ
Москва, Ленинские горы.
Лицензия на издательскую деятельность ИД 04059,
от 20.02.2001 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета и Франко-русского центра им. А. М. Ляпунова.