

Урок №1 (03.09.2012)
Повторение пройденного. Что осталось.
Механические колебания.

0. Краткий обзор пройденных тем

- Кинематика
- Динамика (+ статика)
- Законы сохранения энергии и импульса в механике
- Механика жидкости и газов
- Термодинамика
- Молекулярно-кинетическая теория
- Электростатика
- Постоянный ток
- Магнитостатика
- Цепи переменного тока
- Переходные процессы в RC- и RL- цепочках

Разговор о том, что осталось.

1. Описание механической системы

Заметим, что для описания движения системы частиц, необходимо знать следующее:

- какую-нибудь функцию, описывающую либо положение тела в любой момент времени, либо скорость тела, либо ускорение... т.е. какую-нибудь из функций вида: $x(t)$, или $v(t)$, или $a(t)$.
- набор констант, задающих параметры движения тела в момент времени $t = 0$ – начальное положение x_0 , начальную скорость v_0 , начальное ускорение a_0 (раньше мы рассматривали равноускоренное движение, и a_0 было просто равно постоянному ускорению a с которым движется тело).

Зная, например, функцию, описывающую положение тела в любой момент времени $x(t)$, мы могли получить и функцию, описывающую скорость тела в любой момент времени:

$v(t) = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$. Аналогично получалась и функция, опи-

сывающая ускорение тела в любой момент времени: $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$. И

так далее.

В качестве примера рассмотрим одномерное равноускоренное движение. Как известно, положение тела в этом случае описывается следующим уравнением:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

В этой формуле x_0 , v_0 и a – константы, задающие положение, скорость и ускорение тела в момент времени, когда мы начали наблюдение ($t = 0$). Легко заметить,

что $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v(t) = v_0 + at$ – хорошо известная формула скорости равноускоренного движения.

Вторая производная от положения по времени $\ddot{x}(t) = a(t) = a$ даёт ускорение в любой момент времени. Т.к. движение у нас *равноускоренное*, т.е. с постоянным ускорением, мы, как и следовало ожидать, получаем, что ускорение не зависит от времени и равно константе a .

Совершенно аналогично мы можем записать зависимость положения, скорости, ускорения тела в случае движения в пространстве:

если у нас известна функция $\vec{r}(t)$, то скорость в любой момент времени равна

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \text{ а ускорение } - \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}.$$

Пользуясь принципом независимости движения мы в процессе решения получившейся системы уравнений раскладывали векторы по осям X , Y , Z и получали систему из нескольких нелинейных уравнений.

Заметим, что принцип независимости движения работает только в системах, в которых отсутствуют механические связи: к примеру, движение бусинки, нанизанной на леску в форме окружности, описать независимо по осям не удастся.

Попробуем, пользуясь связью между функциями положения тела, скорости и ускорения в произвольный момент времени, решить следующую задачу:

Груз массы m лежит на горизонтальном абсолютно гладком столе. Слева груз соединён пружиной жёсткости k с вертикальной стенкой. Описать движение груза во времени.

2. Свободные механические колебания

Груз на пружинке.

Рассматриваем груз массы m , лежащий на гладкой плоскости, прикрепленный с одной стороны к стенке (слева) через невесомую идеальную пружину жёсткости k .

Расположим систему координат так, чтобы ось X лежала вдоль плоскости и положение груза, при котором пружина не растянута, соответствовало координате $x = 0$.

Сместим груз на небольшое расстояние x (малое, в смысле закона Гука, т.е. пружина испытывает упругую деформацию). Возникает *возвращающая сила* $F(x) = -kx$ – смысл слова *возвращающая* в знаке «минус».

Отпустим груз. Тогда, по второму закону Ньютона $ma = -kx$.

Полагая, что $a = \ddot{x}(t)$, получим:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t), \text{ или } \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0.$$

Обратим внимание, что $\ddot{x}(t)$ – это не просто какая-то функция времени, а именно вторая производная функции $x(t)$, т.е. они взаимосвязаны.

Заметим, что получившееся равенство есть, по сути дела, уравнение относительно $x(t)$, т.е. для того, чтобы выяснить, как будет двигаться груз, нам надо найти функцию $x(t)$, которая *при любых t* , превращала бы полученное выражение в тождество. Такое уравнение называется *дифференциальным уравнением второго порядка*.

Решается оно «угадыванием», или детальным анализом движения тела. В нашем случае, например, наблюдая за движением груза, можно заметить следующее:

- при прохождении точки равновесия $x = 0$ скорость груза максимальна;
- скорость груза плавно уменьшается по абсолютной величине и достигает нуля в крайних точках положения груза;
- груз движется симметрично влево и вправо, т.е. его максимальные отклонения от точки равновесия равны;
- из закона сохранения энергии можно написать, что $\frac{kx_m^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2}$, где x_m – максимальное отклонение, а v_m – максимальная скорость груза.

Опираясь на эти наблюдения, мы можем предположить, что функция скорости от времени имеет вид синуса или косинуса. Зная, что косинус – это производная синуса, мы можем предположить, что положение тела описывается, скажем, формулой $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$. Тогда $\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \alpha)$ и $\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$.

Заметим, что всё это время мы просто «гадаем», опираясь на наши наблюдения. Нам может повести в наших догадках, а может и не повести!

Проверим теперь наши предположения. Подставляя $x(t)$ и $\ddot{x}(t)$ в наше уравнение, получим: $-A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) + \frac{k}{m} A \sin(\omega t + \alpha) = 0$, откуда получаем, что при $\omega = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$ наше уравнение превращается в тождество при любых значениях времени.

Итак, нам повезло, – мы решили наше дифференциальное уравнение второго порядка! Рассмотрим наше решение:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha), \text{ где } \omega = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}.$$