Урок №2 (10.09.2012)
Энергетические превращения в осцилляторе. Фазовые траектории осциллятора. Аппроксимация малых колебаний гармоническими.

1. Свободные механические колебания (продолжение)

Груз на пружинке.

Итак, на прошлом уроке мы предположили, что функция скорости от времени имеет вид синуса или косинуса. Зная, что косинус – это производная синуса, мы можем предположить, что положение тела описывается, скажем, формулой $x(t) = A\sin(\omega t+\alpha)$. Тогда $\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t+\alpha)$ и $\ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t+\alpha)$.

Заметим, что всё это время мы просто «гадаем», опираясь на наши наблюдения. Нам может повести в наших догадках, а может и не повести!

Проверим теперь наши предположения. Подставляя $x(t)$ и $\ddot{x}(t)$ в наше уравнение, получим: $-A\omega^2\sin(\omega t+\alpha)+\frac{k}{m}A\sin(\omega t+\alpha)=0$, откуда получаем, что при $\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$ наше уравнение превращается в тождество при любых значениях времени.

Итак, нам повезло, – мы решили наше дифференциальное уравнение второго порядка! Рассмотрим наше решение:

$x(t) = A\sin(\omega t+\alpha)$, где $\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Терминология.

Введём терминологию: A – *амплитуда* колебаний; ω – *циклическая частота* колебаний; α – *начальная фаза* колебаний, а весь аргумент синуса $(\omega t+\alpha)$ называется *фазой* колебаний. Любая физическая система, движущаяся по полученному закону, называется *гармоническим осциллятором*.

Обратим внимание, что A и α остались неопределёнными константами. Они определяются *начальными условиями*.

Связь между периодом T, частотой f и циклической частотой ω: $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$.

Частота f измеряется в *герцах*, круговая частота ω – в радианах в секунду (рад/с).

Чаще всего в задачах требуется найти период колебаний T.

Изохронность осциллятора.

Заметим, что частота собственных колебаний нашего осциллятора не зависит от начальных условий. Т.е. если мы оттянем пружину на 1 см или на 1 м, частота колебаний не изменится! Главное, чтобы при этом деформация пружины оставалась упругой.

Малые колебания.

Заметим, что мы решили не только задачу, описывающую движение груза, прикреплённого к пружине. Мы решили произвольную задачу вида: *описать движение тела, если при смещении тела из положения равновесия, возникает возвращающая сила, пропорциональная смещению*.

Ещё один интересный факт: в большинстве механических систем, находящихся в состоянии устойчивого равновесия, при малом смещении возникает возвращающая сила, пропорциональная этому смещению – это закон Гука: $F(x) = -kx$! Причём речь идёт не только о деформациях: чуть ниже мы, например, разберём колебания *математического маятника*, в котором силы упругости не действуют.

Т.е. мы решили целый класс задач, касающихся систем, находящихся в состоянии устойчивого равновесия: малое отклонение такой системы от равновесного состояния приводит к колебаниям, которые можно описать функцией $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$, где $\omega = \pm\sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Такие колебания называются *гармоническими*.

Математический маятник.

Математический маятник – это материальная точка (груз) массы m , подвешенная в поле силы тяжести на нити, длины l. Груз отклоняют на небольшой угол θ, так чтобы длина дуги $l \cdot \theta$ была много меньше длины нити l .

В простейшем случае полагаем, что ускорение направлено тангенциально (т.е. вдоль окружности, по которой движется материальная точка). В этом случае возвращающая сила равна $F(x) = -mg\sin\theta$, где x – смещение груза по горизонтали. Т.к. мы рассматриваем малое смещение, мы можем сделать два упрощения: во-первых, мы можем считать $\sin\theta \approx \theta$, во-вторых, длину дуги, на которую отклонили груз – $l \cdot \theta$, мы можем заменить на смещение груза по горизонтали x .

В итоге получим: $F(x) = -mg\sin\theta \approx -mg\theta = -\dfrac{mg}{l} \cdot l \cdot \theta \approx -\dfrac{mg}{l} \cdot x$.

Итак, в этом случае коэффициент k в возвращающей силе равен $k = \dfrac{mg}{l}$. Подставляя это в выражение для круговой частоты, получим для математического маятника: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{mg}{ml}} = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

Мы можем получить это же решение без сведения задачи к предыдущей. Действительно, для математического маятника можно записать второй закон Ньютона $ma(t) = -mg\sin\theta(t)$, где $\theta(t)$ – угол наклона маятника в момент времени t .

Учитывая связь между угловым и линейным ускорением $\ddot{\theta}(t) = \dfrac{a(t)}{l}$, а также вспоминая, что для малых углов $\sin\theta \approx \theta$, получим:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{a(t)}{l} = -\frac{g}{l}\sin\theta(t) \approx -\frac{g}{l}\theta(t).$$

В итоге мы получаем дифференциальное уравнение $\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}\theta(t)$, которое мало чем отличается от аналогичного для колебаний груза на пружинке.
Решая его, получаем циклическую частоту малых колебаний математического маятника: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

2. *Физический маятник*

Момент силы, действующий на физический маятник, относительно точки подвеса равен $\tau = -mgh\sin\theta$, где h – расстояние от точки подвеса до центра тяжести маятника.

По второму закону Ньютона $\tau = I\ddot{\theta} = -mgh\sin\theta$. Полагая угол θ малым, получаем уравнение $\ddot{\theta} + \left(\frac{mgh}{I}\right)\theta = 0$.

Отсюда видим, что период малых колебаний физического маятника равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$.

Мы получили удобный способ измерения момента инерции I для различных тел.

Приведенная длина физического маятника – длина математического маятника с тем же периодом малых колебаний: $L = \frac{I}{mh}$. Точка, располагающаяся на расстоянии L от оси вращения на линии, проходящей через центр масс, называется *центром качаний*. Центр качаний обладает следующими свойствами: 1) он взаимно заменяем с точкой подвеса относительно центра масс, причем период колебаний не меняется; 2) если по маятнику нанести удар по точке центра качаний, то в точке подвеса не возникает силы реакции.

3. *Задачи*

1. Кубик совершает малые колебания в вертикальной плоскости, двигаясь без трения по внутренней поверхности сферической чаши. Определить период колебаний кубика, если внутренний радиус чаши R, а ребро кубика много меньше R.
2. С какой частотой будет колебаться палка массы m и площади поперечного сечения S, плавающая на поверхности воды в вертикальном положении? Плотность воды известна.
3. В U-образной трубке постоянного сечения находится вода. Общая длина заполненной водой части трубки равна $l = 20$ см. Чему равен период колебаний воды T при нарушении равновесия?