Урок №4 (22.09.2012)
Затухающие колебания.

Вязкое трение

Если маятник совершает колебания в воздухе, то на него действует сила вязкого трения: $F_{тр} = -\beta\vec{\mathbf{v}}$. В этом случае уравнение колебаний приобретает вид:

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}.$$

Вводя обозначения $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ и $2\gamma = \dfrac{\beta}{m}$, получим уравнение:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Это более сложное дифференциальное уравнение второго порядка, чем то, которое мы решали ранее. Но способ решения – похожий. Сначала надо подумать, как именно может выглядеть решение, а потом проверить, подходит ли оно.

Рассуждаем так: если у нас трение небольшое, то колебания всё равно будут (возможно, впрочем, что с другой частотой, отличной от ω_0). При этом со временем амплитуда колебаний будет потихоньку уменьшаться от начального, максимального значения A_0 до нуля, при этом т.к. трение вязкое (т.е. сила трения тем меньше, чем меньше скорость), процесс никогда не остановится. Итак, общий вид нашего решения должен быть таким: $x(t) = A(t)\cdot\cos(\omega t + \alpha)$, где функция $A(t)$ обладает следующими свойствами:

- $A(0) = A_0$;
- $A(t) > 0$ при любом t;
- $A(\infty) \to 0$.

Таким свойством обладает функция $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$.

Мы можем прийти к виду функции $A(t)$ из энергетических соображений.

Рассмотрим, что происходит с энергией системы. Предположим, что потери энергии малы за период колебаний.

По определению $dE = \vec{\mathbf{F}}_{тр}\cdot d\vec{\mathbf{r}}$. Учитывая, что $\vec{\mathbf{F}}_{тр}$ и $\vec{\mathbf{v}} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$ противонаправлены, можем записать по оси X: $dE = -\beta v_x dx = -\beta v_x^2 dt$. Таким образом, скорость изменения <u>полной</u> энергии осциллятора пропорциональна его <u>кинетической</u> энергии:

$$\frac{dE}{dt} = -\beta v_x^2 = -\frac{2\beta}{m}E_к.$$

Так как кинетическая энергия меняется за период колебаний, энергия теряется неравномерно. Если потери малы, то мы можем усреднить потери за период: $\dfrac{dE}{dt} = -\dfrac{2\beta}{m}\langle E_к \rangle$.

Заметим, что в гармоническом осцилляторе $\langle E_к \rangle = \dfrac{1}{2}E$*, поэтому окончательно получаем* $\dfrac{dE}{dt} = -2\gamma E$.

Решением этого дифференциального уравнения первого порядка является функция $E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}$*, где* E_0 *– энергия системы в начальный момент времени.*

Энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, поэтому для амплитуды затухающих колебаний можно записать $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$.

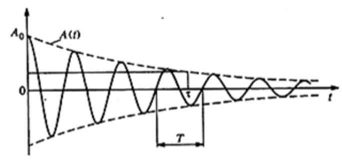

График затухающих колебаний будет иметь вид, показанный на рис.

Время, равное $\tau = 1/\gamma$, называют *время жизни колебаний*.

Для того, чтобы наши рассуждения были верны, необходимо, чтобы $\tau \gg T$.

Найдя выражение для амплитуды колебаний, мы можем получить полное решение нашего уравнения колебаний $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Очевидно, что решение не должно сильно отличаться от решения для свободных колебаний (с точностью до изменений амплитуды): $x(t) = A(t)\cos(\omega t + \alpha) = A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha)$.

Итак:

$\dot{x}(t) = A_0\left(-\gamma e^{-\gamma t}\right)\cos(\ ) + A_0 e^{-\gamma t}\left(-\omega\sin(\ )\right)$, и

$$\ddot{x}(t) = A_0 e^{-\gamma t}\left\{\left(\gamma^2\right)\cos(\ ) + (-\gamma)\left(-\omega\sin(\ )\right) + (-\gamma)\left(-\omega\sin(\ )\right) + \left(-\omega^2\cos(\ )\right)\right\}$$

Подставляя этот кошмар в наше уравнение и сокращая A_0, $e^{-\gamma t}$ и подобные, получим уравнение $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, откуда находим $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Вот так решаются дифференциальные уравнения второго порядка...

Подведём итог: в случае вязкого трения, если сила трения равна $F_{тр} = -\beta\vec{\mathbf{v}}$, затухающие колебания груза массы m, прикреплённого к пружине жёсткости k, описываются уравнением $x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha)$, где A_0 определяется начальными условиями, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ и $\gamma = \dfrac{\beta}{2m}$.

Сухое трение.

Если у нас осциллятор движется в системе с сухим трением, то его движение описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx - \mu mg, \text{ при } \dot{x} > 0 \\ m\ddot{x} = -kx + \mu mg, \text{ при } \dot{x} < 0 \end{cases}$$

Таким образом, приходится решать два уравнения, которые сменяют друг друга при прохождении точки максимального отклонения. Если при этом возвращающей силы не хватит, для преодоления силы трения, то тело осциллятора останавливается: вблизи положения равновесия существует *область застоя*, шириной $2\mu mg/k$.

Если начальное смещение меньше, чем $\mu mg/k$, то тело покоится, если больше – возникают затухающие колебания.

Каждое из уравнений системы описывает гармонические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Наличие постоянной силы приводит к смещению положения равновесия: переписав уравнение колебаний в виде $m\ddot{x} = -k\left(x - x_0\right)$, найдем: $x_0 = \pm\dfrac{\mu mg}{k}$.

В итоге, график колебаний системы при наличии сухого трения, выглядит так: