Урок №5 (24.09.2012)
Вынужденные колебания. Резонанс.

1. *Описание процесса.*

Предположим, на осциллятор действует внешняя сила. Если сила постоянна, то это приводит к смещению центра равновесия, но более никак не влияет на характер движения осциллятора.

Предположим теперь, что сила носит периодический характер, например в простейшем осцилляторе – груз на пружине – стена, к которой прикреплена пружина, колеблется по некоему синусоидальному закону. Внешнюю силу, действующую таким образом, называют вынуждающей.

В этом случае движение системы во времени можно разделить на два участка: переходный процесс, когда система «помнит» начальные условия, и установившееся движение, определяемое параметрами вынуждающей силы.

2. *Уравнение движения.*

Для случая, когда вынуждающая сила гармонически изменяется со временем, уравнение движения для случая вязкого трения можно записать так: $m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + F_0\cos\omega t$.

Введём обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m},\ 2\gamma = \frac{\beta}{m},\ f_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Тогда наше уравнение приобретает вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t.$$

3. *Установившиеся колебания.*

Случай без трения.

Рассмотрим сначала случай установившихся колебаний. Причём сначала для простоты пренебрежём трением:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t.$$

Опыт показывает, что в конце концов изучаемая нами система начинает совершать колебания с частотой вынуждающей силы. Попробуем поискать решение в виде:

$$x(t) = a\cos\omega t.$$

Подставляя получим:

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right)a\cos\omega t = f_0\cos\omega t,$$

откуда получаем для амплитуды колебаний:

$$a = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

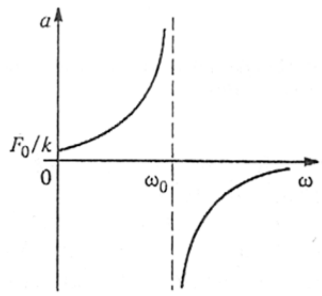


График полученной амплитуды от частоты вынуждающей силы выглядит так, как показано на рисунке.

При $\omega > \omega_0$, колебания происходят в противофазе.

Резонанс – совпадение частот собственных колебаний и колебаний вынуждающей силы.

Учёт трения.

Попробуем найти решение в виде: $x(t) = a \cdot \cos(\omega t + \theta)$. В этом случае

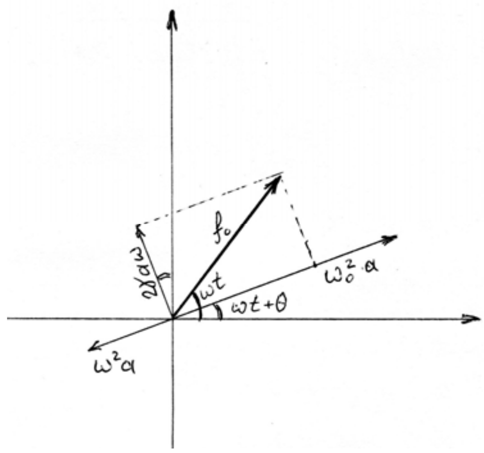
$\dot{x}(t) = -a\omega \sin(\omega t + \theta)$,

$\ddot{x}(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t + \theta)$.

Подставляя в уравнение, получаем:

$-a\omega^2 \cos(\omega t + \theta) - 2\gamma a\omega \sin(\omega t + \theta) + \omega_0^2 a \cos(\omega t + \theta) = f_0 \cos(\omega t)$.

Для его решения воспользуемся методом векторных диаграмм. На рисунке видно, что в результате сложения трёх векторов, изображающих три наших слагаемых (проекции на горизонтальную ось), должен получиться вектор длины f_0.



Из теоремы Пифагора получаем:

$f_0^2 = \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 a^2 + 4\gamma^2 a^2 \omega^2$, откуда

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

Из тригонометрии получаем также, что

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Заметим, что в присутствии трения амплитуда не увеличивается до бесконечности при резонансе и равна $a_{рез} = f_0 / 2\gamma\omega$.

4. Переходный процесс.

Если осциллятор в момент времени $t = 0$ покоится, то $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$. Но эти начальные условия невозможны при $x(t) = a \sin(\omega t + \theta)$!

Истинное решение должно переходить в наше при $t \to \infty$. При этом в начальный момент времени, пока вынуждающая сила ещё не «передала» свою частоту системе, система должна колебаться с собственной частотой ω_0. Со временем эта составляющая должна затухнуть, а решение перейти к виду $t \to \infty : x(t) = a \cos(\omega t + \theta)$.

Решить здесь эту задачу в общем виде не представляется возможным из-за её громоздкости. Скажем лишь, что решение имеет вид:

$$x(t) = a\cos(\omega t + \theta) - ae^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t + \theta).$$

Слева приведён график этой функции. Видно, что сначала оба слагаемых равны и дают в сумме ноль, но с течением времени роль второго слагаемого уменьшается, и система начинает колебаться с частотой вынуждающей силы.