Урок №9 (15.10.2012)
Решение задач на электрический колебательный контур.

1. *Разбор сложных задач*

1. Написать уравнение для $I(t)$ и для зависимости зарядов на конденсаторах от времени на схеме, показанной на рисунке, если в начальный момент (т.е. в момент замыкания ключа) конденсатор C_1 заряжен до заряда q.

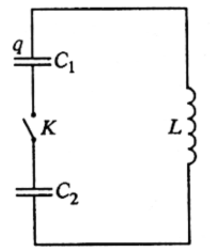


Рис. 161. В начальный момент времени заряжен только один конденсатор

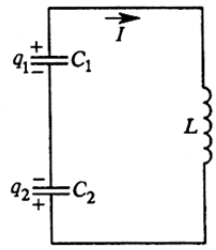


Рис. 162. Заряды конденсаторов и ток в контуре после замыкания ключа

Решение. Пусть через малый промежуток времени после замыкания ключа знаки зарядов и направления тока выглядят, как на рисунке. Тогда $q_1 + q_2 = q$ и сумма напряжений на всех элементах равна нулю: $-\frac{q_1}{C_1} + L\frac{dI}{dt} + \frac{q_2}{C_2} = 0$. При этом ток через катушку равен $I = \frac{dq_2}{dt} = -\frac{dq_1}{dt}$. Исключая $\frac{dI}{dt}$ и q_2, получим уравнение:

$$q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) + L\ddot{q}_1 - \frac{q}{C_2} = 0.$$

Обозначим через $\omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}$, где $C_0 = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$, получим $\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 - \frac{q}{LC_2} = 0$. Произведем замену: $Q(t) = q_1(t) - q\frac{C_1}{C_1 + C_2}$. Заметим, что $\ddot{Q}(t) = \ddot{q}_1(t)$. В итоге получим уравнение $\ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$, имеющее решением $Q(t) = Q_0\sin(\omega_0 t + \alpha)$. Тогда для $q_1(t)$ получим:

$$q_1(t) = q\frac{C_1}{C_1 + C_2} + Q_0\sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Константы Q_0 и α найдём из условий $q_1(0) = q$, $I(0) = 0$.

$$I(t) = \omega_0 Q_0\cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Итак, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $Q_0 = q\frac{C_1}{C_1 + C_2}$ и полное решение:

$$q_1(t) = q\frac{C_1}{C_1 + C_2}\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\cos\omega_0 t\right),\ I(t) = q\sqrt{\frac{C_2}{L(C_1 + C_2)C_1}}\sin\omega_0 t.$$ ■

2. Контур состоит из катушки индуктивностью L, сопротивления R и конденсатора ёмкостью C. Какую мощность P должен потреблять контур, чтобы в нём поддерживались незатухающие колебания, при которых максимальное напряжение на конденсаторе U_m.

Решение. Во-первых, сразу запишем начальный заряд на конденсаторе: $Q_0 = U_m C$.

Теперь порассуждаем, что же у нас происходит. Очевидно, у нас затухающие колебания (т.к. в схеме есть сопротивление). Для затухающих колебаний уравнение для заряда на конденсаторе выглядит так:

$\ddot{q}+2\gamma\dot{q}+\omega^2 q=0$, где $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$, $\omega_0=\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$, $\gamma=\dfrac{R}{2L}$.

Решением этого уравнения является функция

$q(t)=Q_0e^{-\gamma t}\cos(\omega t)$, – мы здесь сразу учли начальные условия $q(0)=Q_0$; $I(0)=0$.

Для того чтобы колебания не затухали, контур должен потреблять энергию, для того чтобы компенсировать её рассеяние на сопротивлении.

Посчитаем, какая энергия тратится за один (первый) период $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$: в начале конденсатор заряжен до заряда Q_0 и его энергия равна $E(0)=\dfrac{Q_0^2}{2C}$. Через один период заряд на конденсаторе станет равным $Q(T)=Q_0e^{-\gamma T}$. Его энергия при этом станет равна $E(T)=\dfrac{Q_0^2e^{-2\gamma T}}{2C}$.

Таким образом, за первый период теряется энергия

$$\Delta E=\frac{Q_0^2}{2C}\left(1-e^{-2\gamma T}\right),$$

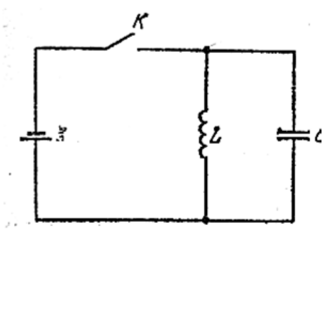
или, другими словами, расходуемая мощность равна

$$\Delta P=\frac{\Delta E}{T}=\frac{\omega}{2\pi}\frac{U_m^2\cdot C}{2}\left(1-e^{-2\gamma T}\right).$$

Это и есть ответ задачи, т.к. именно такую мощность необходимо передавать контуру, чтобы колебания в нём не затухали.

2. *Самостоятельное решение задач*

1. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L=0,2\ Гн$ и конденсатора ёмкостью $C=10^{-5}\,Ф$. Конденсатор зарядили до напряжения $U=2\ В$, и он начал разряжаться. Какой будет сила тока в тот момент, когда энергия окажется поровну распределённой между электрическим и магнитным полем?
2. В колебательном контуре происходят свободные колебания. Зная максимальный заряд конденсатора q_m и максимальную силу тока I_m, найти частоту колебаний этого контура.
3. В цепь переменного тока с частотой $\nu=50\ Гц$ и напряжением $U=220\ В$ включены последовательно конденсатор, активное сопротивление $R=100\ Ом$ и катушка индуктивностью $L=0,7\ Гн$. Рассчитать ёмкость конденсатора, при которой возникает резонанс напряжения. Определить силу тока в цепи при резонансе.



4. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности L и конденсатора ёмкости C, через ключ K подключён к источнику с ЭДС ε с внутренним сопротивле-

нием r. Первоначально ключ замкнут. После установления стационарного режима ключ размыкают и в контуре возникают колебания с периодом T. При этом амплитуда напряжения на конденсаторе в n раз больше ЭДС батареи. Найти индуктивность катушки и ёмкость конденсатора. Сопротивлением катушки пренебречь.

Задача на десерт

5. Контур образован двумя параллельными проводниками, замыкающим их соленоидом индуктивностью L и проводящим стержнем массой m, который может без трения скользить по проводникам. Проводники расположены в горизонтальной плоскости, в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B. Расстояние между проводниками – l. В начальный момент времени $(t=0)$ стержню сообщили скорость v_0. Записать закон движения проводника $x(t)$. Сопротивление контура пренебрежимо мало.