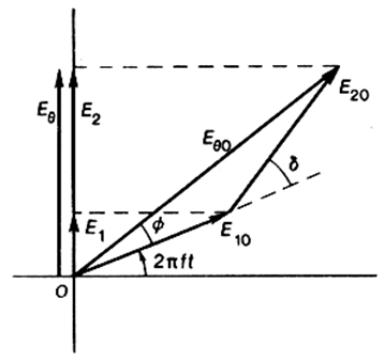
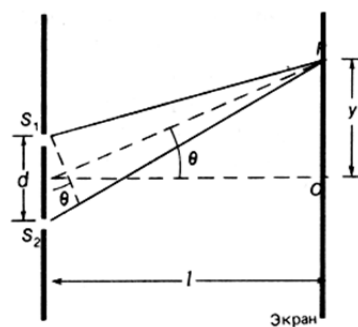


## Урок №1 (14.01.2013) Дифракционная решётка

### 1. Метод фазовых диаграмм в расчёте интерференционной картины

Предположим вначале, что если закрыть любое из отверстий, то каждая точка экрана будет освещена равномерно с интенсивностью  $I$  ( $I \sim E^2$ ). Если открыть обе щели, то напряжённость электрического поля на экране будет равна  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . При этом вектора напряжённости можно считать практически сонаправленными, т.к. расстояние до экрана много больше расстояния между отверстиями, поэтому можно записать  $E = E_1 + E_2$ . Обозначим через  $E_\theta$  напряжённость на экране в точке, которая видна под углом  $\theta$  от щелей.



В районе экрана  $E_1 = E_{10} \sin \omega t$  и  $E_2 = E_{20} \sin(\omega t + \delta)$ , где  $\delta$  – это разность фаз, возникающая между первой и второй волной в результате того, что расстояния от отверстий до экрана разные.

Сумму  $E_1 + E_2$  можно найти с помощью метода фазовых диаграмм.

Из рисунка видно, что  $\delta = 2\phi$ , где  $\delta$  – это разность фаз между волнами  $E_1$  и  $E_2$ , а  $\phi$  – фаза суммарной волны. Тогда  $E_\theta = E_{\theta 0} \sin(\omega t + \phi) = E_{\theta 0} \sin(\omega t + \delta/2)$ .

При этом амплитуда этой волны  $E_{\theta 0}$  зависит от угла  $\theta$ , под которым свет движется от щелей на экран, и равна  $E_{\theta 0} = 2E_0 \cos(\delta/2)$  – это выводится чисто геометрически, как длина основания равнобедренного треугольника.

При этом зависимость разности фаз  $\delta$  от угла  $\theta$  можно найти из условия, что при разности хода лучей  $\lambda/2$  лучи приходят в противофазе ( $\delta = \pi$ ), при этом искомая зависимость линейная. «Из пропорции» легко найти, что  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$ .

В результате мы окончательно получаем для интерференционной картины, создаваемой двумя щелями:

$$E_{\theta 0} = 2E_0 \cos\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right).$$

Из этой формулы, в том числе, видно, что яркие полосы на экране расположены в углах, удовлетворяющих условию  $\cos\left(\frac{\pi d \sin \theta_{\max}}{\lambda}\right) = \pm 1$ , или  $\theta_{\max} = \frac{\lambda}{d} n$  (мы воспользовались малостью угла  $\theta$  и заменили  $\sin \theta \approx \theta$ ).

## 2. Дифракционная решётка

### Интерференция волн от большого числа источников.

До сих пор мы рассматривали интерференцию от двух источников (схема Юнга). При этом мы делали следующие предположения:

- ширина отверстия такова, что свет от всех вторичных источников, по принципу Гюйгенса расположенных в отверстии, приходит к наблюдателю в одной фазе;
- расстояние до точки наблюдения интерференционной картины много больше расстояния между отверстиями экрана (т.е. лучи от разных отверстий мы приближённо считали параллельными).

Рассмотрим в тех же предположениях интерференцию от большого количества источников (большого количества тонких щелей) расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга.

Рассмотрим распространение световых лучей под углом  $\theta$  к нормали. В этом случае разность хода между соседними лучами составит  $d \sin \theta$ . Поэтому очевидно максимумы будут видны под углами, при которых  $d \sin \theta = n\lambda$ , где  $n$  – натуральное число. В итоге, полагая угол  $\theta$  малым, получим, как и для

опыта Юнга:  $\theta_{\max} = \frac{\lambda}{d} n$ .

Однако более внимательное рассмотрение интерференции от многих источников выявляет «тонкую» структуру. Рассмотрим фазовую диаграмму для  $N$  источников. Будем считать, что расстояние между двумя соседними щелями равно  $d$  и, следовательно, разность фаз между соседними

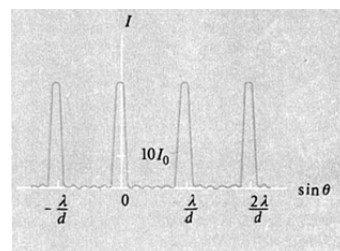
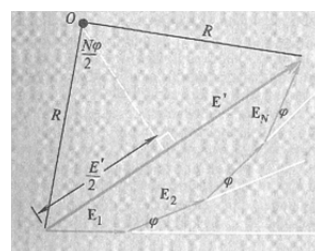
лучами одинакова и равна  $\varphi = k_{\Delta} l = kd \sin \theta$  (где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  –

волновое число). Из диаграммы видно, что векторы образуют что-то типа сектора окружности с некоторым радиусом  $R$ . Угол при вершине  $O$  равен  $N\varphi$ . Тогда напряжённость электрического поля под углом  $\theta$  равна  $E' = 2R \sin(N\varphi/2)$ . С другой стороны, напряжённость электрического поля, создаваемого одним источником под тем же углом равна  $E_1 = 2R \sin(\varphi/2)$ . Отсюда получаем для отношения напряжённостей  $E'/E_0 = \sin(N\varphi/2)/\sin(\varphi/2)$ , а для интенсивностей:

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}.$$

График этой функции при  $N = 6$  приведён на рисунке. Из графика видно, что между максимумами, возникающими при  $\sin \theta = \frac{\lambda}{d} n$ , или  $\varphi = kd \sin \theta = k\lambda n$ , располагается  $N - 1$  минимум. Поэтому в картине интерференции от нескольких источников максимумы называются *главными* (в отличие от небольших максимумов между минимумами).

Посчитать угловое положение этих минимумов можно из фазовой диаграммы. Минимум освещённости образуется тогда, когда векторная диаграмма «сворачивается в кольцо», т.е. когда  $N\varphi = 2\pi m$ , где  $m = 1, 2, \dots, N - 1$ .



Подставляя в это выражение значение, полученное выше для сдвига фаз у соседних лучей  $\varphi = kd \sin \theta = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$ , получим:

$$Nd \sin \theta_{\min} = m\lambda, \text{ где } m = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Очевидно, что положения минимумов между первым и вторым главными максимумами даются той же формулой, при  $m = N + 1, \dots, 2N - 1$  и т.д.

Также очевидно, что между  $N - 1$  минимумами располагаются  $N - 2$  *побочных* максимума. Механизм их возникновения ясен из соответствующей векторной диаграммы.

