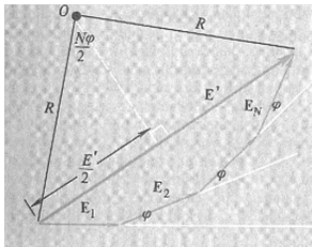
Урок №2 (21.01.2013)
Дифракционная решётка, дифракция Фраунгофера.

1. Дифракционная решётка

Повторение.

Главные максимумы расположены, как и в опыте Юнга: $\theta_{\max} = \dfrac{\lambda}{d} n$.



Однако более внимательное рассмотрение интерференции от многих источников выявляет «тонкую» структуру. Рассмотрим фазовую диаграмму для N источников. Будем считать, что расстояние между двумя соседними щелями равно d и, следовательно, разность фаз между соседними лучами одинакова и равна $\varphi = k_{\Delta} l = kd\sin\theta$ (где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число). Из рисунка видно, что векторы образуют что-то типа куска правильного многоугольника, с радиусом описанной окружности R. Причём угол в вершине O равен $N\varphi$. Тогда напряжённость электрического поля под углом θ равна $E' = 2R\sin(N\varphi/2)$. С другой стороны, напряжённость электрического поля, создаваемого одним источником под тем же углом равна $E_1 = 2R\sin(\varphi/2)$. Отсюда получаем для отношения напряжённостей $E'/E_0 = \sin(N\varphi/2)/\sin(\varphi/2)$, а для интенсивностей:

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}.$$

Угловое положение минимумов можно получить, приравняв числитель нулю и учитывая, что знаменатель не равен нулю, т.е. когда $N\varphi = 2\pi m$, где $m = 1, 2, ..., N-1$.

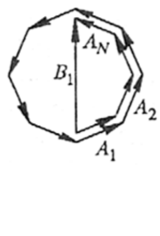
Подставляя в это выражение значение, полученное выше для сдвига фаз у соседних лучей $\varphi = kd\sin\theta = 2\pi\dfrac{d}{\lambda}\sin\theta$, получим:

$$Nd\sin\theta_{\min} = m\lambda, \text{ где } m = 1, 2, ..., N-1.$$

Очевидно, что положения минимумов между первым и вторым главными максимумами даются той же формулой, при $m = N+1, ..., 2N-1$. В общем виде, между n-ным и $n+1$-м главными максимумами, положения минимумов описывается выражением

$$Nd\sin\theta_{\min} = m\lambda, \text{ где } m = n\cdot N+1, n\cdot N+2, ..., n\cdot N+N-1.$$

Также очевидно, что между $N-1$ минимумами располагаются $N-2$ *побочных* максимума. Механизм их возникновения ясен из соответствующей векторной диаграммы.

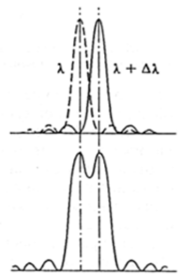


Разрешающая способность дифракционной решётки.

Один из приборов, позволяющих получать интерференцию от большого количества источников, называется *дифракционной решёткой*. Это либо прозрачный материал, либо зеркальный, покрытый непрозрачной плёнкой, в которой проделано множество параллельных царапин. Если ширина царапины (щели) равна b, а соседние щели расположены на расстоянии a друг от друга, то величину $a+b$ называют *постоянной* решётки. Современные решётки имеют до 1200 штрихов на 1 мм.

Дифракционные решётки используют для разделения света на отдельные монохроматические волны. Положение главных максимумов (кроме центрального) зависит от длины волны падающего света. Поэтому решётку можно использовать для разложения исследуемой световой волны в спектр (*спектральный анализ*).

Пусть у нас падающий свет содержит два цвета с близкими длинами волн λ и $\lambda + \Delta\lambda$. *Разрешающей способностью* решётки называется отношение λ к минимально возможному значению $\Delta\lambda$.



Критерий Рэлея: соседние главные максимумы различимы, если они расположены не ближе ограничивающих минимумов.

Заметим, что ширина интерференционного пика в главном максимуме равна расстоянию между двумя окружающими его минимумами.

Положение ближайшего к n-ному главному максимуму минимума для длины волны λ даётся выражением: $Nd\sin\theta = (Nn+1)\lambda$. С другой стороны для n-ного главного максимума с длиной волны $\lambda+\Delta\lambda$: $Nd\sin\theta = Nn(\lambda+\Delta\lambda)$. Следовательно, при выполнении критерия Рэлея $(Nn+1)\lambda = Nn(\lambda+\Delta\lambda)$, или

$$\lambda/\Delta\lambda = nN .$$

Как видно, разрешающая способность дифракционной решётки тем выше, чем больше N, т.е. ширина главного максимума тем меньше, чем больше штрихов в решётке.

2. Дифракция в параллельных лучах (дифракция Фраунгофера).

Сразу разберёмся, что такое интерференция, а что такое дифракция.

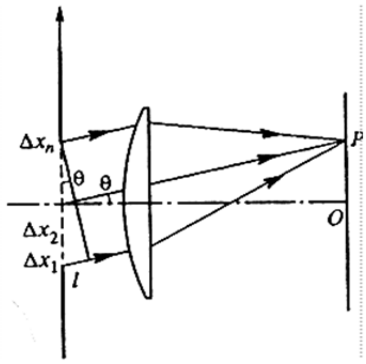
Интерференцией называют эффект сложения двух или нескольких когерентных волн, в результате чего получается интерференционная картина: хорошо различимые максимумы, возникшие при сложении амплитуд.

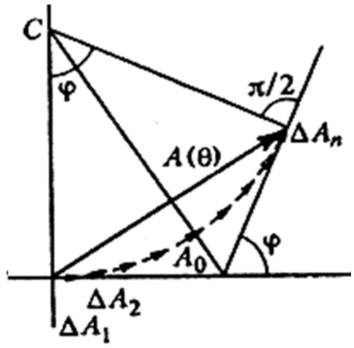
Дифракцией называют эффект сложения волн от вторичных источников, возникающих по принципу Гюйгенса. Т.е. это эффект, возникающий из-за того, что источник (или щель, или отверстие) имеют ненулевой размер – в результате чего в этом отверстии появляется некоторое количество вторичных источников, волны от которых складываются и образуют дифракционную картину: обычно очень слабый эффект на краю изображения или тени.

Дифракция, строго говоря, есть всегда и везде. Однако обычно она компенсируется светом других источников, при этом посчитать её очень сложно. Есть два случая, которые были рассмотрены Фраунгофером и Френелем, – первый рассмотрел случай дифракции на большом расстоянии от отверстия, а Френель – на малом.

Основные идеи Фраунгофера:

- Возьмём тонкую щель – больше освещённость и легче наблюдать. В качестве источника света берём светящуюся нить.
- Соберём параллельные лучи линзой – теперь оптическая разность хода разных лучей зависит только от угла, под которым щель видна от данной точки экрана (нет дополнительной разности хода от разных частей щели – основного эффекта в дифракции Френеля).





Сложение колебаний от разных областей щели можно проводить с помощью векторной диаграммы (см. обозначения на рисунке).

Тут надо немного пояснить. Мы используем для построения векторной диаграммы те же идеи, что и при расчёте дифракционной решётки (см. выше). Пусть для начала мы имеем дифракционную решётку ширины b. Пусть сначала там как в примере наверху очень мало (всего 4!) щелей – в этом случае мы получим многоугольник. Далее мы мысленно начинаем увеличивать количество щелей N и, одновременно, уменьшать расстояние d между ними. Причём делаем это так, чтобы суммарная ширина нашей решётки оставалась равна b. Постепенно наши щели становятся всё тоньше (соответственно векторы – всё короче), но суммарная длина векторов не меняется, т.к. в свою очередь количество щелей растёт. В пределе, когда векторы станут бесконечно короткими, а число их станет бесконечно большим, мы получим кусок окружности, длиной равной суммарной длине векторов.

Заметим, во-первых, что угол φ легко считается из пропорции: $\varphi = 2\pi$ при $l = \lambda$. Поэтому $\varphi = 2\pi \dfrac{l}{\lambda} = 2\pi \dfrac{b\sin\theta}{\lambda}$, где b – ширина щели.

Во-вторых, длина дуги равна амплитуде колебаний A_0 в центре экрана (алгебраическая сумма длин всех векторов).

В итоге, для амплитуды в точке экрана P, из которой щель видна под углом θ, имеем: $A(\theta) = 2R\sin\dfrac{\varphi}{2} = 2\dfrac{A_0}{\varphi}\sin\dfrac{\varphi}{2}$, или $A(\theta) = A_0 \dfrac{\sin(\varphi/2)}{\varphi/2}$.

Интенсивность $I(\theta)$ в точке P пропорциональна квадрату амплитуды:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(\varphi/2)}{(\varphi/2)^2}, \text{ где } \varphi = 2\pi \frac{b\sin\theta}{\lambda}.$$